ORSAY
n° d'ordre : 3235

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR 3e CYCLE

SPECIALITE : OPTIQUE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

par

Monsieur CHARDON Dominique

==========

SUJET : MESURE DU COEFFICIENT D'ABSORPTION ET DE LA DIFFUSIVITE THERMIQUE DES FIBRES OPTIQUES PAR METHODE PHOTOACOUSTIQUE

Soutenue le 10 juin 1982 devant la Comission d'Examen

MM. MARECHAL Président
ARNAUD
BADOZ
DESAINTFUSCIEN
HUARD
IMBERT

ORSAY
n° d'ordre : 3235

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR 3e CYCLE

SPECIALITE : OPTIQUE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

par

Monsieur CHARDON Dominique

==========

SUJET : MESURE DU COEFFICIENT D'ABSORPTION ET DE LA DIFFUSIVITE THERMIQUE DES FIBRES OPTIQUES PAR METHODE PHOTOACOUSTIQUE

Soutenue le 10 juin 1982 devant la Comission d'Examen

MM. MARECHAL Président
ARNAUD
BADOZ
DESAINTFUSCIEN
HUARD
IMBERT

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Au terme de ce travail, je tiens à remercier ici Monsieur le Professeur A. MARECHAL de m'avoir accueilli à l'Institut d'Optique et d'avoir accepté la présidence de mon jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur C. IMBERT qui m'a permis de développer ce travail au sein de son groupe.

Que Messieurs les Professeurs J. ARNAUD et M. DESAINTFUSCIEN soient remerciés pour l'intérêt porté à ce travail et pour avoir accepté de participer à mon jury.

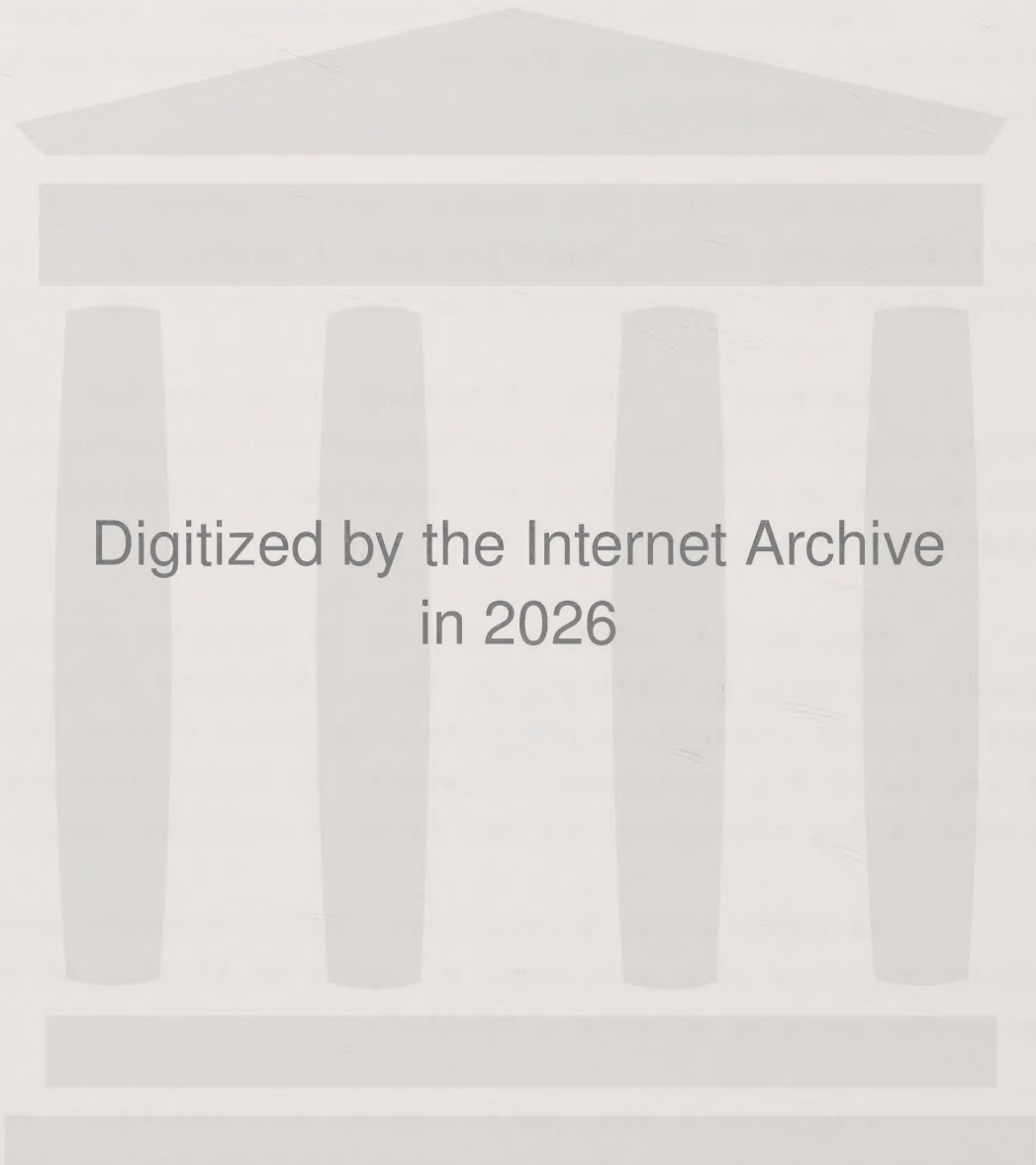
Monsieur J. BADOZ, Directeur de recherches, qui s'intéresse depuis longtemps aux techniques photoacoustiques, a porté une attention particulière aux expériences réalisées, je l'en remercie vivement.

Monsieur S. HUARD a proposé le sujet et encadré de façon aussi attentive qu'efficace un jeune chercheur inexpérimenté. Ses précieux conseils m'ont permis de mener à bien les initiatives qu'il m'a rapidement laissées. Je tiens tout particulièrement à lui témoigner ici une amicale reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Madame A. HUARD pour son aide précieuse au cours de la mise en oeuvre du pointeur optique qu'elle a réalisé.

J'associe à ces remerciements mes collègues du laboratoire pour l'ambiance dans laquelle j'ai pu travailler durant ces deux années.

Je ne saurais enfin oublier Mademoiselle N. BONAVENT qui a apporté rapidité et compétence pour la frappe de ce mémoire et Madame A. DELMOTTE qui en assuré le tirage.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543515_0020

Table des Matières

Chapître I : Problèmes de caractérisation des fibres
Présentation des méthodes thermiques

I-1 - Deux problèmes liés à la caractérisation des fibres optiques.

I-1-1- Rappels sur les fibres optiques
I-1-2- Principales causes de pertes dans une fibre
I-1-3- Les méthodes classiques de mesure de pertes
I-1-4- Problème lié à l'utilisation d'une fibre comme capteur.

I-2 - Présentation de deux méthodes thermiques de mesure d'absorption

I-2-1- Technique photoacoustique
I-2-2- Principe de la déviation photothermique ou effet mirage

I-3 - Application des méthodes thermiques aux fibres

I-3-1- Photoacoustique
I-3-2- Déviation photothermique

Chapître II : Approche Théorique

II-1 - Modélisation du dispositif

II-1-1- Densité de chaleur produite par absorption de lumière
II-1-2- Symétrie de l'échantillon. Schéma du dispositif.
II-1-3- Le modèle utilisé

II-2 - Etude thermoélastique des solides

II-2-1 - Les grandeurs thermoélastiques
II-2-2 - Equations thermoélastiques dans les solides
II-2-3 - Répartition de température dans la fibre.

II-3 - Etude thermodynamique du gaz

II-3-1 - Variables utilisées dans le gaz.
II-3-2 - Equations thermodynamiques
II-3-3 - Répartition de température dans le gaz

II-4 - Méthodes de détection de la température de surface T_s

II-4-1 - Détection photoacoustique

II-4-1-1- Calcul du signal photoacoustique P.A.
II-4-1-2- Extension du modèle R.G. à la symétrie cylindrique
II-4-1-3- Relation d'étalonnage
II-4-1-4- Caractéristiques de l'amplitude du signal P.A.
II-4-1-5- Etude du déphasage en fonction de la fréquence.

II-4-2 - Détection utilisant l'effet mirage

II-4-2-1- Expression de la déviation photothermique
II-4-2-2- Variations de la déviation photothermique en fonction de la fréquence de modulation.

II-4-2-3- Influ ence de l'étendue du faisceau sonde.

II-4-5 - Conclusion

Chapitre III : Dispositifs expérimentaux et mesures

III-1 - Expérience utilisant une cellule photoacoustique

III-1-1 - Dispositif expérimental

III-1-1-1- La source de lumière
III-1-1-2- Le modulateur
III-1-1-3- La fibre optique
III-1-1-4- La cellule photoacoustique
III-1-1-5- Détection du signal

III-1-2 - Mesure du coefficient d'absorption

III-1-2-1- Etude de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence.
III-1-2-2- Courbe d'étalonnage
III-1-2-3- Influence de la lumière diffusée
III-1-2-4- Résultats de la mesure du coefficient d'absorption
III-1-2-5- Bruits et limitations

III-1-3 - Mesure de la diffusivité thermique

III-2 - Expériences utilisant l'effet mirage

III-2-1 - Schéma du dispositif
III-2-2 - Le pointeur de direction
III-2-3 - Mesures

Conclusion

Références
Annexe I
Annexe II
Annexe III

CHAPITRE I

PROBLEMES DE CARACTERISATION DES FIBRES

PRESENTATION DES METHODES THERMIQUES

L'utilisation des ondes électromagnétiques dans le domaine des fréquences optiques pour transmettre un signal est difficile dans l'atmosphère en particulier à cause de l'absorption moléculaire et des turbulences atmosphériques. Elle connaît aujourd'hui un développement très rapide grâce à la propagation guidée dans les fibres optiques. Il n'en demeure pas moins qu'il existe des pertes de flux dans un guide optique caractérisées par le coefficient d'atténuation β_T défini de la façon suivante. Si ϕ_o est le flux couplé à l'entrée de la fibre de longueur L, il ressort un flux ϕ_L

$$\phi_L = \phi_o \exp(-\beta_T L)$$

On exprime couramment β_T en dB/km ; 4,3 dB/km correspondant à $10^{-5} cm^{-1}$. La caractérisation des guides, en particulier sur le plan des pertes est nécessaire pour l'amélioration de leurs performances. Parmi les causes de pertes figure l'absorption qui peut être mesurée par des méthodes thermiques que nous décrivons dans ce chapître.

Si, dans le domaine des télécommunications on cherche à minimiser les perturbations du guidage de la lumière, il a été récemment montré (1) que l'analyse des effets d'une contrainte mécanique ou thermique appliquée à la fibre permet de la transformer en capteur de pression ou de température.

I-1 Deux problèmes liés à la caractérisation des fibres

I-1-1 Rappels sur les fibres optiques

Une fibre optique est un guide diélectrique cylindrique

../..

constitué d'un coeur et d'une gaine optique d'indice de réfraction plus faible. La répartition d'indice dans le coeur peut-être uniforme, pour une fibre à saut d'indice, ou au contraire variable. Dans ce cas le gradient d'indice est réalisé en introduisant de façon contrôlée des dopants tels que le bore, le fluor, le germanium, le phosphore dans la silice hautement purifiée. Les méthodes de fabrication qui dépendent du type de fibre considérée ne seront pas évoquées ici (2).

I-1-2 Principales causes de pertes dans une fibre optique

Il existe deux mécanismes d'absorption qui constituent une première cause de pertes. L'interaction des photons avec la silice elle-même peut exciter les vibrations moléculaires créant ainsi des bandes d'absorption dans l'infrarouge. L'absorption de photons plus énergétiques donne lieu à des transitions électroniques et donc à des pics dans l'ultraviolet.

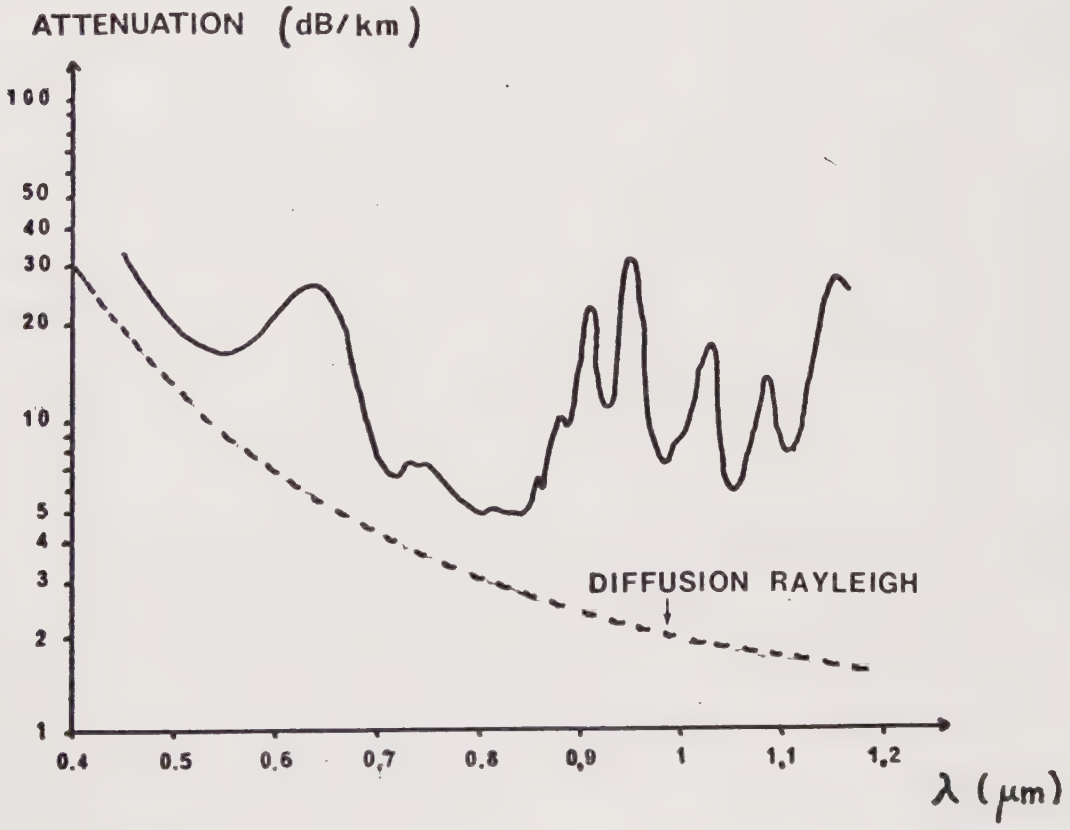
La silice contient d'autre part des dopants introduits volontairement mais aussi des impuretés (Ti, Co, Fe, OH^-) qui présentent leurs propres bandes d'absorption.

Une seconde cause importante d'atténuation est la diffusion Rayleigh. Sous l'action du champ d'une onde électromagnétique, les charges électriques contenues dans la matière se mettent à osciller. Etant ainsi accélérées, elles réemettent de l'énergie électromagnétique dans toutes les directions en raison de λ^{-4} où λ est la longueur d'onde incidente. Actuellement, les télécommunications utilisent $\lambda = 0{,}85$ µm où la diffusion Rayleigh est déjà atténuée. Les meilleures performances des fibres se situent dans l'infrarouge à 1,3 µm et plus récemment 1,55 µm où des atténuations de 0,7 dB/km ont été enregistrées. A celà, il faut ajouter les processus de diffusion inélastique Raman et Brillouin ainsi que d'éventuelles fluorescences mais qui n'interviennent que pour une faible part.

Enfin, la présence de microbulles ou de micro courbures est responsable de pertes assimilables à une diffusion. Notons qu'une fabrication soignée des fibres permet de minimiser ces effets.

I-1-3 - Méthodes classiques de mesure de pertes

L'amélioration des fibres passe le contrôle des impuretés et des dopants qui implique une spectroscopie d'absorption. Or, les méthodes classiques de spectroscopie (spectrophotométrie, rétrodiffusion) ne permettent pas de séparer absorption et diffusion. En particulier, l'étude du rapport flux transmis sur flux réfléchi fournit un spectre d'absorption superposé à un fond important de diffusion Rayleigh.



Du fait de la grande transparence du matériau, une telle étude nécessite l'emploi de grandes longueurs de fibres et le résultat fournit l'atténuation moyenne. La rétrodiffusion (3) est plus performante. Cette technique consiste à injecter une courte impulsion lumineuse de forte énergie à une extrémité de la fibre et à observer à cette même extrémité le flux rétrodiffusé par les différentes parties.

Une analyse temporelle de ce signal permet de préciser les variations d'atténuation le long de la fibre, la résolution spatiale étant liée à la durée de l'impulsion (typiquement 3m pour des impulsions de 10ns). Cependant, l'inconvénient majeur est la faiblesse du flux rétrodiffusé.

Notons enfin qu'une analyse en spectroscopie Raman de la lumière diffusée permet à priori de déterminer la nature des dopants (4).

L'absorption de la lumière, liée à des transferts d'énergie non radiatifs, entraine un échauffement de l'échantillon ; les méthodes thermiques sont donc particulièrement bien adaptées aux mesures de ce type de pertes. L'application au cas des fibres optiques des méthodes présentées dans le paragraphe suivant permettent, de façon non destructive la discrimination des causes de pertes dans un guide optique. La mesure obtenue est locale avec une résolution de quelques centimètres pour l'une d'entre elles. La réalisation de telles expériences permettra parallèlement de contribuer à la détermination de la nature de certaines atténuations dont l'origine est mal connue.

Des pertes élevées, appelées pic de fibrage, apparaissent autour de 630 nm à la suite de l'étirage de la fibre à partir de de la préforme. L'hypothèse d'un pic de fluorescence (4) récemment faite à la suite d'une analyse de la lumière diffusée par spectroscopie Raman peut-être confirmée par une méthode thermique.

D'autre part, l'utilisation de fibres optiques en zone irradiée entraine une augmentation énorme des pertes (5). Sachant que les verres s'opacifient lorsqu'ils sont soumis à des irradiations de haute énergie, il est probable qu'il s'agisse d'absorption.

Enfin, ils convient de citer l'emploi de guides optiques pour transporter de la lumière sur de courtes distances comme dans un avion, une automobile... Dans ce but, sont actuellement étudiées des fibres synthétiques (6) dont la mise au point nécessite une caractérisation sur la plan de l'absorption (contrôle de composition etc...).

II-1-4 Problème lié à l'utilisation d'une fibre comme capteur

Lorsqu'on applique localement une contrainte mécanique à une fibre optique, la propagation de la lumière à l'intérieur est perturbée. Le principe d'un capteur tient dans l'étude des modifications du champ électromagnétique à la sortie du guide. De façon plus précise, la lumière ne peut se propager que suivant certains modes dans une fibre et si son diamètre est de l'ordre de quelques longueurs d'onde, elle devient monomode (2). En toute rigueur, il s'agit de deux modes orthogonaux du champ électromagnétique qui, si la fibre a une parfaite symétrie de révolution, sont dégénérés (ils se propagent à la même vitesse). L'application d'une contrainte entraine, par effet photoélastique (7), une modification de l'indice de réfraction souvent anisotrope ; autrement dit la fibre devient biréfringente et la dégénérescence de mode est ainsi levée. On dispose alors de toutes les techniques d'analyse interférométrique en lumière polarisée pour mesurer les variations de la biréfringence induite sur la fibre.

Suivant que la contrainte est d'origine mécanique ou thermique la fibre est transformée en capteur de pression ou de

température. Il importe donc, dans la mise au point d'un capteur de température, de connaître la gradient thermique qui existe à l'intérieur de la fibre. Le temps de réponse est donc principalement déterminé par la vitesse à laquelle la chaleur diffuse, grandeur essentiellement liée à la diffusivité thermique (8) χ_f de la fibre, rapport de la conductivité thermique K_f et de sa capacité calorifique par unité de volume (ρ_f masse volumique, C_f chaleur spécifique) : $\chi_f = K_f / \rho_f C_f$
La détermination de χ_f est donc importante mais délicate. La présence de dopants et d'impuretés entraine certainement des différences entre les paramètres thermiques de la fibre et ceux de la silice pure. Un tel guide étant de plus, par construction, étiré à partir d'une préforme, doit posséder des caractéristiques qui s'écartent sensiblement de celles du matériau massif, sans parler d'une anisotropie éventuelle de la conductivité thermique. Ces deux faits impliquent par conséquent une mesure in situ sur le produit étiré (fibre) de très faible diamètre typiquement 120 µm.

Les méthodes classiques (8) de mesure de diffusivité qui, pour la plupart passent par la mesure de la conductivité thermique K_f à l'aide de thermocouple se montrent ici très délicates à mettre en oeuvre. En effet, cette grandeur étant liée à la diffusion de la chaleur, il faut, pour sa mesure, étudier le flux thermique engendré par une source de chaleur dans l'échantillon ce qui parait très difficile pour un matériau de 60 µm d'épaisseur. Les dimensions du thermocouple sont alors grandes devant celles de la fibre ; celà peut perturber sensiblement la mesure.

I-2 Présentation de deux méthodes thermiques de mesure d'absorption

Les méthodes thermiques proposées ici, sont non destructives et exemptes de contact entre la fibre et le détecteur.

Le principe est simple : un échantillon E absorbant est éclairé par une onde électromagnétique. L'énergie électromagnétique absorbée par l'échantillon est transformée en chaleur augmentant ainsi sa température, et provoquant plusieurs phénomènes simultanés. Du point de vue mécanique, il y a dilatation et sur le plan thermique, la différence de température qui existe entre E et le milieu qui l'entoure, provoque une diffusion de la chaleur. La répartition de température de l'environnement de E est donc modifiée. Si ces élévations sont importantes, rayonnement et convection prennent alors une part importante dans les échanges thermiques (8).

La répartition de température dans le milieu extérieur à E est caractéristique de la quantité d'énergie absorbée par l'échantillon. Il reste à détecter ces variations de températures et à les relier à l'absorption. La méthode la plus naturelle est la calorimétrie (9) mais sa mise en oeuvre est difficile du fait des faibles élévations de température, 10^{-4} à 10^{-5}°C pour la fibre. ($\phi_o \sim 100$ mW)

D'autres méthodes, basées sur une approche thermique, ont été présentées en 1974 (10). Nous en décrivons deux autres différentes.

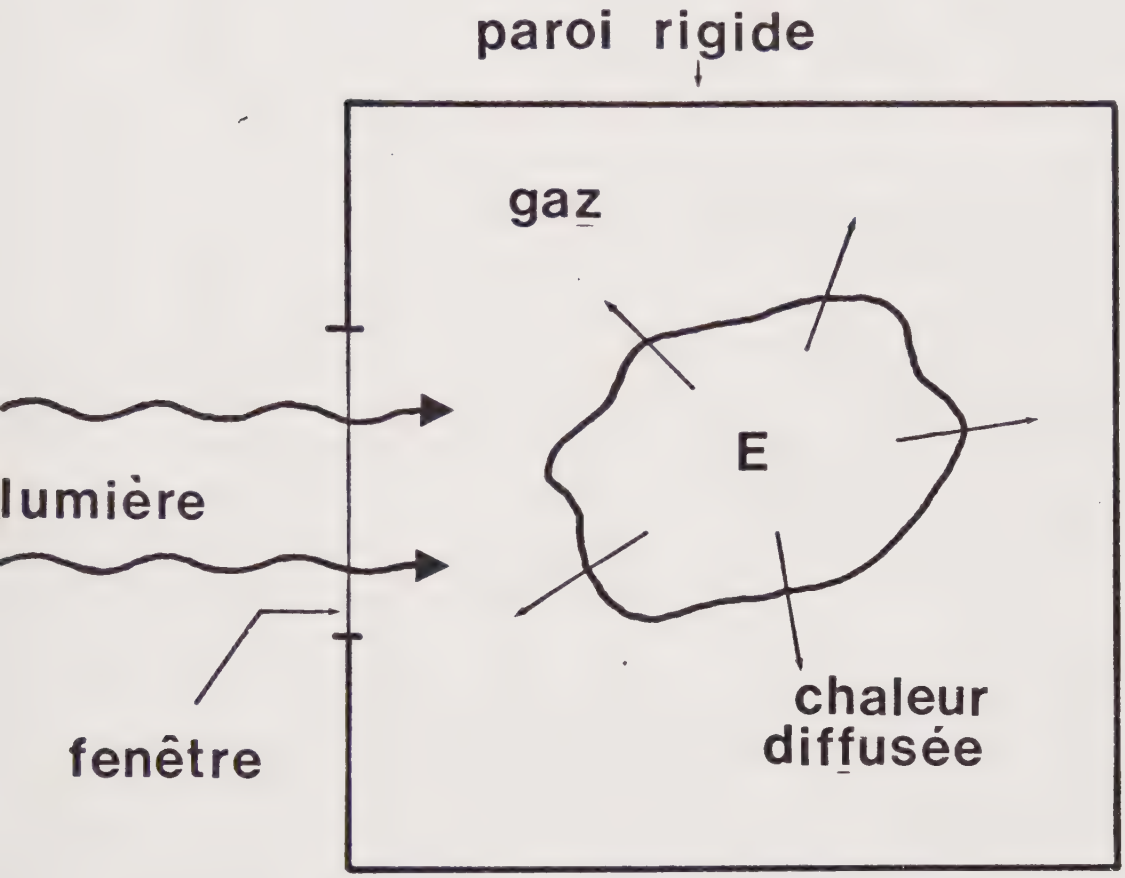
I-2-1 Technique photoacoustique

L'échantillon est dans ce cas entouré d'un gaz dont le volume est maintenu constant par un récipient rigide (cellule photoacoustique).

Toute variation de température dans le gaz se traduit alors par une modification de la pression qui reste très faible dans le cas de matériaux peu absorbants (10^{-7} à 10^{-9}atm

../..

pour la fibre). La mesure statique de telles surpressions est d'une part difficile et de plus perturbée par toute fluctuation



due à des phénomènes parasites. Pour surmonter cette difficulté, il suffit de moduler en amplitude la lumière incidente qui entraine alors l'apparition d'une pression alternative à la même fréquence qui est détectée par un microphone. Le signal électrique obtenu est traité par démodulation synchrone augmentant ainsi le rapport signal à bruit. Ces phénomènes constituent le principe de l'effet photoacoustique dont l'existence est connue depuis une centaine d'années : A.G. Bell 1880 (11).

Son utilisation n'a commencé qu'une cinquantaine d'années plus tard, pour étudier l'absorption des gaz (l'échantillon est le gaz lui-même) dans le domaine infrarouge (12). Ce n'est que depuis quelques années que l'effet photoacoustique connaît un nouvel essor tant sur le plan théorique qu'expérimental. Le premier modèle théorique quantitatif a été proposé par Parker en 1973 (13). Une théorie plus complète de l'effet photoacoustique dans la matière condensée due à Rosencwaig et Gersho (14) a suivi en 1976. Ces dernières années, ces modèles n'ont cessé d'être améliorés tenant compte de phénomènes de plus en plus nombreux (Bennett et Forman (15), Aamodt (16), Mc Donald (17)). Plus récemment encore, l'utilisation de sources pulsées pour l'étude des liquides a été développée (Tam (18)). La spectroscopie photoacoustique, plus particulièrement sensible à l'absorption apporte des résultats là où d'autres méthodes sont mises en difficulté. La plupart des méthodes classiques de spectroscopie concernent l'étude du rapport du flux transmis Φ_t par l'échantillon au flux incident Φ_i .

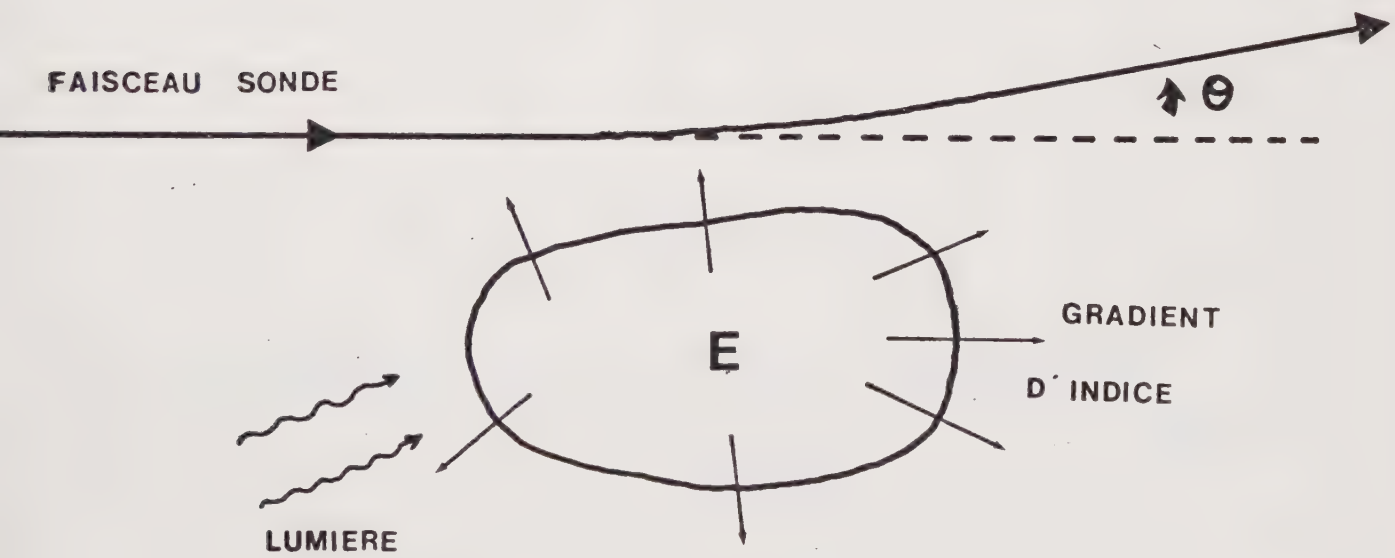
Avec des matériaux très absorbants ou très diffusants la quantité Φ_t/Φ_i est très petite devant 1 et le signal détecté est très faible. Notons que l'utilisation de flux incidents importants peut-être nuisible par échauffement dans le cas de l'absorption. La technique photoacoustique est alors particulièrement adaptée, tout échauffement dû à la lumière absorbée contribuant au signal de pression. A l'opposé, dans le cas de matériaux très transparents Φ_t/Φ_i est voisin de l'unité et le spectre d'absorption est superposé à un fond continu important, le rapport signal à bruit étant faible. La photoacoustique, basée sur les pertes par absorption permet d'éliminer ce fond lumineux. La fibre optique entre dans cette catégorie mais présente d'autres avantages qui sont exposés plus loin.

../..

Cependant, si le signal photoacoustique est principalement relié à l'absorption, il est vrai qu'une partie de la lumière diffusée par l'échantillon peut-être absorbée par les parois de la cellule et donner lieu au même effet. Cette influence peut devenir prépondérante dans le cas de matériaux très diffusants. Aussi, une autre méthode de détection de la répartition de température dans le milieu environnant a été récemment mise au point, indépendante de la lumière diffusée.

I-2-2 - Principe de la déviation photothermique ou effet mirage

Le principe de détection de la répartition de température n'est plus la mesure d'une pression (il n'y a plus de cellule), mais est basé sur le fait qu'il existe un gradient de température qui, lui-même induit un gradient d'indice. Ce gradient peut alors être détecté,



../..

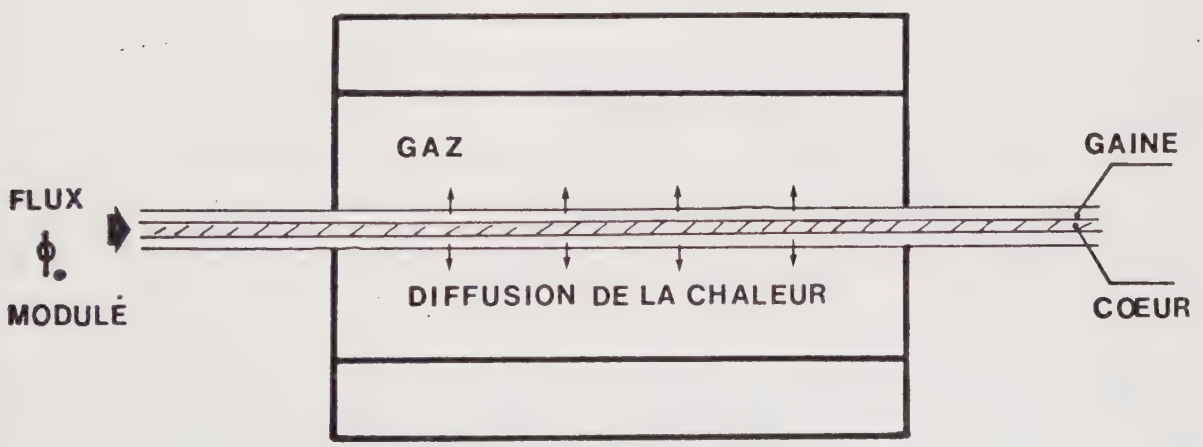
en observant le déviation θ d'un faisceau lumineux (19). Pour les mêmes raisons que précédemment, il est préférable de moduler la lumière et d'effectuer une démodulation synchrone. Cette technique basée sur l'effet mirage a des performances comparables et parfois meilleures que la photoacoustique (20) ; elle est appliquée à de nombreux échantillons avec succès (21), (22).

Les deux méthodes présentées ont été utilisées dans le cas de la fibre optique.

I-3 Application des méthodes thermiques aux fibres optiques

I-3-1 - Photoacoustique

L'application de la technique photoacoustique aux fibres optiques consiste à injecter dans celle-ci de la lumière modulée en amplitude. Une fraction de l'énergie lumineuse guidée dans le coeur de la fibre est absorbée et donc transformée en chaleur qui diffuse radialement à travers la gaine optique avant d'atteindre le gaz.



Il suffit alors que la fibre traverse une cellule hermétiquement close pour qu'une pression modulée apparaisse dans le gaz. Ce signal photoacoustique est proportionnel à la densité d'énergie perdue par absorption (ch. II) soit, en appelant β le coefficient d'absorption par unité de longueur et S la section du coeur de la fibre, $\beta\Phi/S$. C'est cette propriété et le guidage de la lumière par l'échantillon lui-même qui rendent la méthode applicable. En effet, bien que β soit faible (de l'ordre de 10^{-5} cm^{-1} ou 4,3 dB/km) la section S du coeur de la fibre est très petite (9.10^{-4} mm^2 pour une fibre multimode, encore moins pour une monomode) et pour des flux d'une centaine de milliwatts, on obtient des densités d'énergie importantes (10^4 W/m^3).

Dans le cadre d'une spectroscopie d'absorption sur un échantillon, il existe un facteur d'échelle souvent indéterminé sur le coefficient d'absorption et par conséquent la mesure absolue de β nécessite en général un étalonnage. Bien que dans le cas de la fibre, la symétrie de révolution permette de calculer l'amplitude du signal, un étalonnage permet d'éviter toutes les lacunes inhérentes à l'utilisation d'un modèle. Cet étalonnage peut-être aisément réalisé en remplaçant la fibre par un fil résistif parcouru par un courant alternatif de fréquence angulaire $\omega/2$ (moitié de la fréquence angulaire de modulation pour la fibre). Par effet Joule, il apparait alors dans le fil une source de chaleur connue, proportionnelle à I^2 donc à la fréquence ω. Une étude de la répartition de température dans le gaz présentée au chapitre II montre que lorsque les signaux donnés par le fil et la fibre sont égaux, il existe une relation simple entre $\beta\Phi$ et I^2.

L'utilisation d'une grande longueur de fibre est inutile car on augmenterait certes la quantité de chaleur transmise au gaz mais aussi son volume et l'amplitude du signal ne serait pas accrue.

La technique photoacoustique apporte donc une méthode locale et non destructive de discrimination entre les pertes par diffusion et par absorption (23).

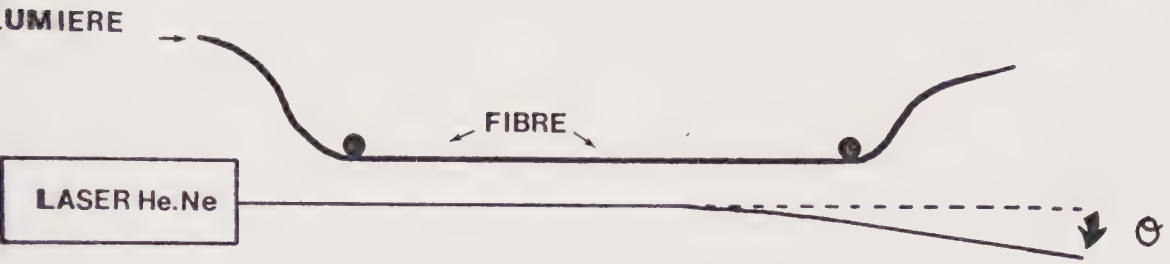
Elle est en fait beaucoup plus riche. La chaleur doit diffuser à travers la gaine optique avant d'atteindre le gaz. Ce phénomène de diffusion se fait avec une vitesse finie déterminée par la diffusivité thermique α_f précédemment introduite. Par suite, lorsque la lumière est modulée en amplitude, il apparait un déphasage entre le signal photoacoustique et le signal de modulation dû à l'inertie thermique de la gaine. Ce déphasage est d'autant plus important que la fréquence de modulation ν est élevée. Une étude de ce déphasage en fonction de ν permet d'atteindre la diffusivité α_f de la fibre. De telles études ont été menées par ailleurs sur des échantillons plans (24). L'avantage de cette méthode par rapport aux méthodes classiques est d'une part de disposer d'une source de chaleur dans l'échantillon et d'autre part l'absence de tout contact avec un détecteur. Tous ces avantages existent pour l'effet mirage mais en plus, la lumière diffusée n'intervient pas dans ces cas.

I-3-2 - Déviation photothermique

Le principe de l'application à la fibre optique de l'effet mirage consiste à mesurer l'angle de déviation d'un faisceau laser He-Ne initialement parallèle à la fibre en l'absence du gradient d'indice dans le gaz.

L'avantage de la fibre, pour cette méthode est de pouvoir donner lieu à de grandes longueurs d'interaction l à laquelle l'angle θ est proportionnel. Cependant, si l devient trop grand, le problème de la déformation du faisceau laser (faisceau gaussien) peut se poser et la définition de sa

déviation n'est pas immédiate. Ce problème peut-être évité en réalisant le même étalonnage que dans la méthode photoacoustique,



ce qui réduit la mesure à la comparaison de deux signaux (23). Enfin, les déviations enregistrées sont très faibles (de l'ordre de 1") et la mesure de tels angles nécessite la mise en oeuvre de détecteurs très performants dont un type est décrit au chapitre III.

La mesure de la diffusivité de la fibre par cette méthode est possible mais nécessite l'utilisation de fréquences de modulation élevées (chapitre II) et donc un détecteur de bande passante suffisamment élevée.

En conclusion, les méthodes thermiques, tant photoacoustique qu'effet mirage semblent adaptées, par leur nature et leur sensibilité, à la mesure du coefficient d'absorption β d'une fibre optique. La technique de l'effet mirage, complétement indé-

pendante de la lumière diffusée confirmera ici les résultats des expériences utilisant la cellule photoacoustique qui a une géométrie mieux adaptée au problème. Enfin, la technique photoacoustique, par son caractère dynamique, fait intervenir l'inertie thermique de la fibre et par là même permet de mesurer la diffusivité thermique d'un matériau aussi fin.

CHAPITRE II

APPROCHE THEORIQUE

Ce chapître est consacré à l'élaboration d'un modèle théorique permettant d'évaluer le signal en amplitude et en phase, engendré par l'absorption de lumière modulée dans une fibre, dans le cadre des deux méthodes proposées au chapître I : utilisation d'une cellule photoacoustique et photodéviation d'un faisceau sonde par "effet mirage".

II-1 - Modélisation du dispositif

II-1-1 - Densité de chaleur produite par absorption de lumière.

Après quelques dizaines de centimètres parcourus, la lumière est presque totalement guidée dans le coeur de la fibre. Pour une fibre monomode, la répartition d'énergie électromagnétique y est parfaitement connue, mais il n'en est plus de même pour une fibre multimode.

Dans tous les cas, le coeur d'une fibre optique ayant un faible diamètre, de l'ordre de 60 µm si elle est multimode, la diffusion de la chaleur (pour des fréquences peu élevées, voisines de quelques centaines de hertz) suffira à rendre la répartition de température quasi uniforme à l'intérieur de la fibre. Cette propriété, qui sera démontrée dans un prochain paragraphe autorise à considérer la répartition de la source de chaleur due à l'absorption comme uniforme dans le coeur de la fibre.

Ce point posé, il reste à relier l'intensité de la source de chaleur au coefficient d'absorption de la fibre.

Considérons de la lumière monochromatique de longueur d'onde λ modulée sinusoïdalement à la fréquence angulaire ω se propageant dans la fibre ; ω est relié à la fréquence ν par $\omega = 2\pi\nu$. L'ensemble des causes de pertes dans le guide optique peuvent être représentées par le coefficient d'atténuation en puissance par unité de longueur $\beta_T(\lambda)$ qui est somme des différents coefficients liés à chaque type de pertes (absorption, diffusion...). $\beta(\lambda)$ désignera le coefficient d'absorption par unité de longueur. En appelant ϕ_o le flux lumineux à l'entrée de la cellule ou de la zone d'interaction de la fibre et du faisceau sonde, la perte de puissance sous forme de chaleur dans un élément de longueur dz à l'abscisse z vaut alors :

$$d\phi = \beta(\lambda)\,\phi_o \left(\frac{1 + \cos \omega t}{2}\right) \exp\left(-\beta_T(\lambda) z\right) dz$$

Comme il est d'usage dans l'étude des régimes harmoniques nous utiliserons la notation complexe avec une dépendance temporelle $\exp i\omega t$ qui conduit immédiatement à :

$$d\phi = \beta(\lambda)\,\phi_o \left(\frac{1 + \exp i\omega t}{2}\right) \exp\left(-\beta_T(\lambda) z\right) dz .$$

Par suite de la faible atténuation des fibres optiques ($\beta_T \simeq 10^{-5}$ cm^{-1} ce qui correspond à 4,3 dB/km) et des longueurs considérées (la cellule photoacoustique a quelques centimètres de long) le produit $\beta_T(\lambda).z$ est très petit devant l'unité et la puissance perdue sous forme de chaleur par unité de volume est :

$$W = \frac{\beta(\lambda)\,\phi_o}{2S}\left(1 + \exp i\omega t\right) \qquad (II.1)$$

Dans cette expression, S désigne la section droite du coeur de la fibre. Dans le cadre de cette approximation, la densité de chaleur est indépendante de z, ce qui entraine la

nullité du flux thermique à travers toute section droite de la fibre. Cette remarque permet de traiter le problème indépendamment de la coordonnée z. Notons que, bien que β soit très faible, (10^{-5} cm^{-1} ou 4,3 dB/km) la section du coeur est elle aussi très petite ($S \simeq 10^{-3}$ mm^2) ce qui permet pour des flux d'une centaine de milliwatts d'obtenir des densités d'énergie importantes (typiquement 10^4 W/m^3). Cette caractéristique, due au fait que la lumière est guidée par l'échantillon, permet d'envisager une réalisation expérimentale. Contrairement aux autres expériences de photoacoustique, les effets de parois pour faire entrer la lumière dans l'échantillon n'existent pas (15).

II-1-2 - Symétrie de l'échantillon - Schéma du dispositif.

Par suite du guidage de la lumière à l'intérieur du coeur de la fibre, la source de chaleur provoquée par absorption possède la symétrie de révolution.

La connaissance de cette source de chaleur autorise le calcul analytique de la répartition de température dans la fibre et, par continuité, dans le milieu environnant.

Cette étape étant franchie, il faut distinguer les deux types de montage envisagés : d'une part, dans le cas de la cellule photoacoustique, l'amplitude complexe de la pression doit être évaluée et dans le cas de l'effet mirage, le calcul porte sur l'angle de déviation du faisceau sonde.

Bien que théoriquement possible, un calcul complet du signal, pression ou déviation, est relativement lourd. Il apparaît donc pratique, en vue d'une mesure du coefficient d'absorption β de la fibre, d'étalonner le système en substituant à celle-ci un fil chauffant parcouru par un courant

alternatif pour lequel la source de chaleur créée par effet Joule est parfaitement connue. L'intensité du courant électrique dans le fil est alors ajustée de façon à obtenir la même pression ou la même déviation suivant la méthode mise en oeuvre.

Dans les expériences de photoacoustique, le fait d'enfermer la fibre dans une cellule ne devait pas rompre la symétrie de révolution. Le montage consiste donc à placer la fibre sur l'axe d'une cellule cylindrique fermée à ses deux extrèmités par des fenêtres percées au diamètre de la fibre en leur centre. (figure II.1).

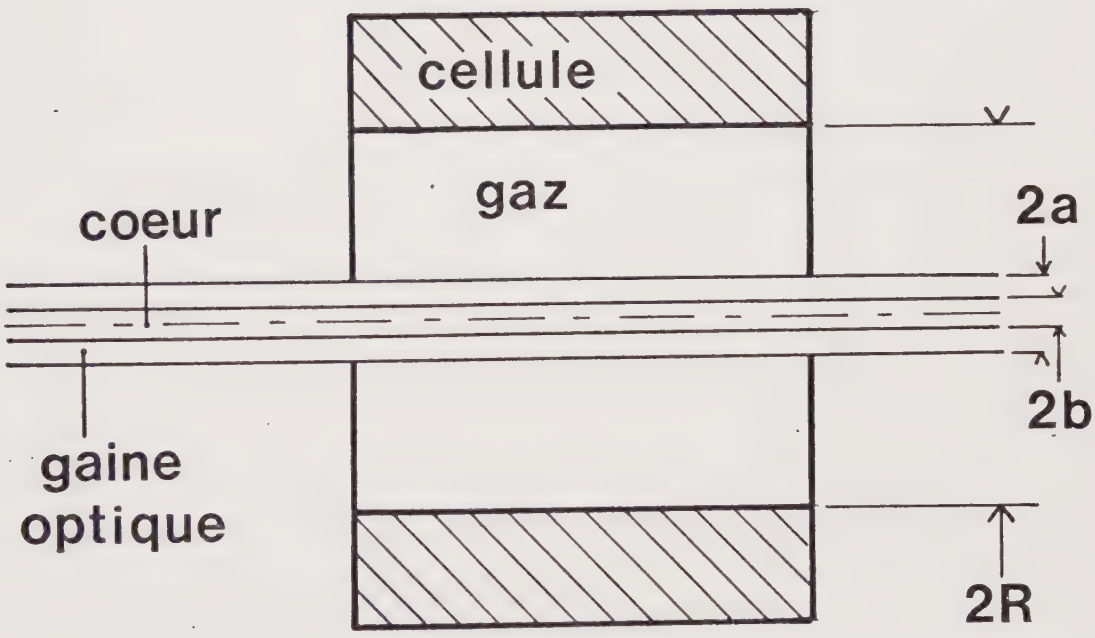


Figure II-1 : Schéma de la fibre dans la cellule

L'utilisation de "l'effet mirage" ne permet pas de préserver cette symétrie. Le faisceau sonde se propage parallèlement à la fibre tendue entre deux points. La direction du

faisceau est repérée à l'aide d'un appareil qui sera décrit dans le chapître III. (Fig. II-2)

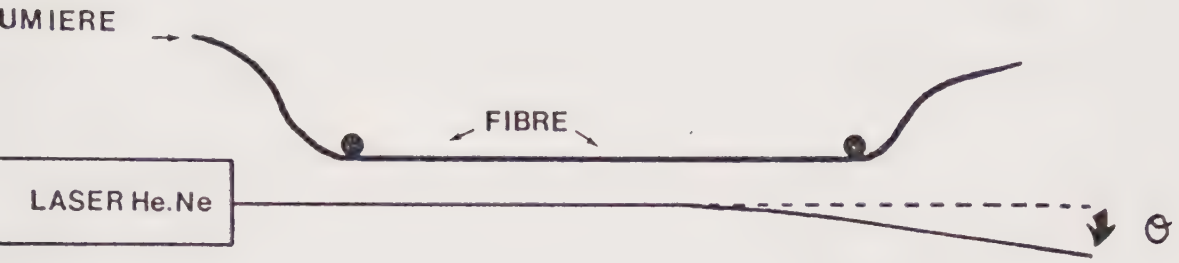


Figure II -2 : Principe de l'effet mirage

II-1-3 - Le modèle utilisé

Lorsqu'un matériau est le siège d'une source de chaleur, créée par absorption dans le coeur de la fibre ou par effet Joule dans le fil métallique, plusieurs effets peuvent se produire. Du point de vue thermique, les échanges de chaleur peuvent se faire essentiellement par conduction, par convection ou par rayonnement. Dans le cas de la fibre, les élévations de température très faibles, de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-3} °C, rendent la perte par rayonnement cent fois plus faible que la perte par conduction (8). Quant à la convection, sa contribution, de l'ordre de grandeur de celle du rayonnement, sera négligée. Seuls les les échanges de chaleur par conduction seront pris en compte dans la suite.

Parallèlement, du point de vue mécanique, l'échantillon peut se dilater à la fréquence angulaire $\omega/2$ et ainsi, engendrer une onde acoustique dans le milieu environnant.

Le problème, dans son ensemble, concerne la thermoélasticité (26) dont les équations seront données plus loin. A ce stade, il convient de préciser les grandeurs à utiliser pour caractériser tous les effets précédemment décrits.

II-2 Etude thermoélastique des solides

II-2-1 - Les grandeurs thermoélastiques

Sur le plan thermique, la connaissance de la répartition spatiale de température permet de caractériser les échanges thermiques et l'état thermodynamique du solide. Les déformations mécaniques d'un solide sont caractérisées géométriquement par le vecteur déplacement $\vec{u}$ défini en chaque point. Cette déformation est la conséquence de l'application d'une contrainte (27). La distribution des contraintes est décrite par un tenseur d'ordre deux appelé tenseur des contraintes. Ses neuf composantes Σ_{ij} sont définies de la façon suivante :

Le solide est rapporté à troix axes Ox_1, Ox_2, Ox_3.
La composante Σ_{ij} est la force qui s'exerce par unité de surface perpendiculaire à Ox_j et parallèlement à Ox_i.

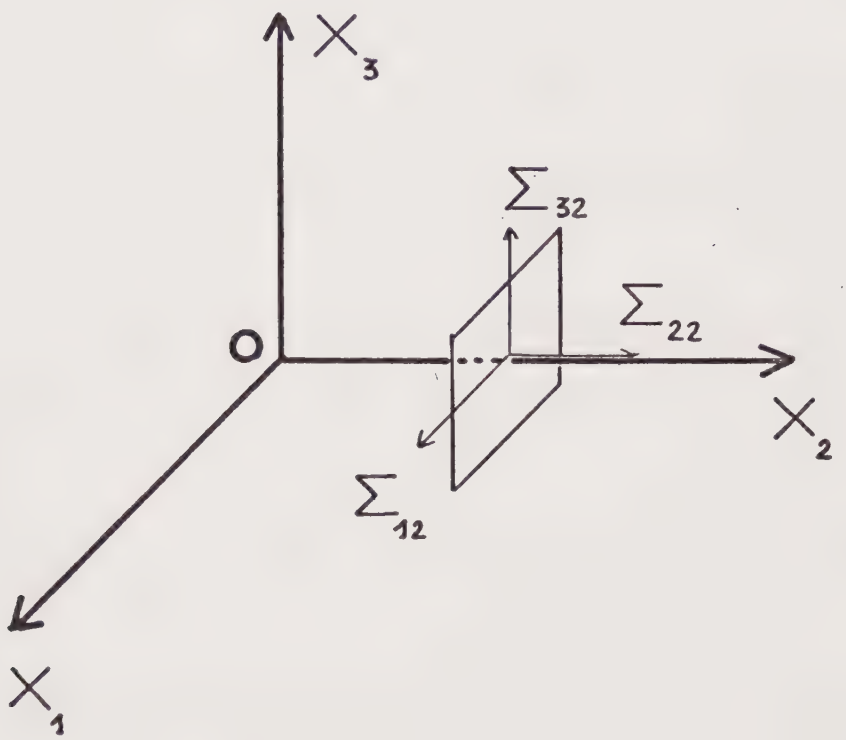
Dans le cas considéré ici, la symétrie de révolution entraine que le déplacement $\vec{u}$ est un vecteur radial qui ne dépend que de $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ce qui peut s'exprimer par :

$$\overrightarrow{rot}\ (\vec{u}) = \vec{0}$$

Ceci montre que $\vec{u}$ dérive d'un potentiel ψ appelé

potentiel des déplacements auquel il est relié par

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \psi$$



Toutes les grandeurs mécaniques et en particulier la contrainte peuvent s'exprimer en fonction du potentiel ψ . La seule composante dont nous aurons besoin est la composante radiale Σ_{rr} qui s'exprime en fonction du potentiel des déplacements par (26) :

$$\Sigma_{rr} = \frac{2\mu}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

où ρ désigne la masse volumique et μ le deuxième coefficient

de Lamé (27). Remarquons enfin que Σ_{rr} a les dimensions d'une pression.

Il reste alors à donner les équations auxquelles obéïssent la température T et le potentiel ψ .

II-2-2 - Equations thermoélastiques dans les solides

Dans le problème considéré, il y a essentiellement deux solides, la fibre et la paroi de la cellule ainsi qu'un gaz. Leurs paramètres physiques seront indicés (i) respectivement par f, p, g.

ρ_i désigne la masse volumique, K_i la conductivité thermique, C_i la capacité calorifique, (λ_i, μ_i) les coefficients de Lamé[1].

α_{t_i} est le coefficient de dilatation, T_o la température absolue ambiante et c_i la vitesse du son (ondes longitudinales).

Les équations thermoélastiques (26) régissant la température T est le potentiel des déplacements ψ sont :

$$\Delta T - \frac{1}{\chi_i}\frac{\partial T}{\partial t} - \eta_i \Delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = -\frac{W}{K_i} \qquad \text{(II-3)}$$

et

$$\Delta \psi - \frac{1}{c_i^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = m_i T \qquad \text{(II-4)}$$

où le terme source W n'est différent de zéro que dans le coeur de la fibre. Dans l'équation (II-3) ce terme W est la densité

---

(1) On utilise de façon équivalente (E_i,σ_i) le module d'Young et le coefficient de Poisson (annexe II).

de chaleur calculée au paragraphe (II-1-1) et χ_i désigne la diffusivité thermique du matériau ; elle s'exprime en fonction de K_i, C_i et ρ_i par :

$$\chi_i = \frac{K_i}{\rho_i C_i}$$

La vitesse des ondes longitudinales c_i s'exprime en fonction des coefficients de Lamé par :

$$c_i^e = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i}$$

Les équations thermoélastiques (II-3) et (II-4) sont des équations couplées par l'intermédiaire des termes $\eta_i \Delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$ et $m_i T$ pour lesquels les coefficients m_i et η_i ont pour expressions :

$$m_i = \left(\frac{3\lambda_i + 2\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}\right) a_{t_i}$$

et

$$\eta_i = (3\lambda_i + 2\mu_i)\, a_{t_i} \frac{T_0}{K_i}$$

Ces termes de couplage, proportionnels au coefficient de dilatation a_{t_i} du matériau, jouent le rôle de "terme source" respectivement pour l'équation de diffusion de la chaleur

$$\Delta T - \frac{1}{\chi_i} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{W}{K_i}$$

et l'équation de propagation du son

$$\Delta \psi - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Autrement dit, en l'absence de source mécanique d'onde acoustique, le seul terme source pour l'équation de propagation du son est $m_i T$ qui est proportionnel à $a_t T$, la dilatation du solide. En conséquence, si le solide ne se dilate pas, il n'existe aucune onde acoustique (ψ = constante et $\vec{u} = 0$) et le problème se réduit à l'équation de diffusion de la chaleur. Dans le cas de la silice, le coefficient m_i vaut 6.10^{-7} K^{-1} ; Etant donnée cette faible valeur, nous ferons l'hypothèse à priori du matériau rigide ; la résolution complète des équations couplées II-3 et II-4, donnée en annexe III justifie cette hypothèse. Il suffit donc de calculer la répartition de température dans la fibre.

II-2-3 Répartition de température dans la fibre

Comme les solutions cherchées ont une dépendance temporelle harmonique $\exp i\omega t$, le problème est ramené à la simple diffusion de la chaleur régie par les équations :

$$0 < r < b \qquad \Delta T - \frac{i\omega}{\chi_f} T = -U \qquad \text{(II-5)}$$

$$b < r < a \qquad \Delta T - \frac{i\omega}{\chi_f} T = 0 \qquad \text{(II-6)}$$

où l'on a posé $U = \beta\phi_0 / 2Sk_f$, ne prenant pas en compte ici la solution statique introduite par la composante indépendante du temps dans l'expression (II-1) de la densité d'énergie.

De façon évidente, l'équation (II-5) admet la solution constante :

$$T_1 = -\frac{iU\chi_f}{\omega} = -\frac{i\beta\phi_0}{2S\rho_f C_f \omega} \qquad \text{(II-7)}$$

pour solution particulière.

La recherche de solutions radiales, ne dépendant que de r pour l'équation sans terme source (telle II-6) conduit naturellement à des fonctions de Kelvin d'ordre zéro (28).

$$\text{Ber}\,(\sigma_f r) = \text{ber}(\sigma_f r) + i\,\text{bei}(\sigma_f r)$$

et

$$\text{Ker}\,(\sigma_f r) = \text{ker}(\sigma_f r) + i\,\text{kei}(\sigma_f r)$$

où $$\sigma_f = \left(\frac{\omega}{\chi_f}\right)^{1/2}$$

Ces ondes cylindriques Ber ($\sigma_f r$) $e^{i\omega t}$ et Ker ($\sigma_f r$) $e^{i\omega t}$ sont respectivement l'analogue des ondes thermiques à croissance ou décroissance exponentielle dans le cas d'une géométrie unidimensionnelle (14) :

$$e^{\sigma_f x}\ e^{i(\omega t + \sigma_f x)} \quad \text{et} \quad e^{-\sigma_f x}\ e^{i(\omega t - \sigma_f x)}$$

La décroissance de l'amplitude de l'onde amortie quand elle s'éloigne de l'axe est caractérisée par analogie au cas unidimensionnel à l'aide de la longueur de diffusion thermique :

$$\ell_{th} = \frac{1}{\sigma_f} = \left(\frac{\chi_f}{\omega}\right)^{1/2} \qquad (\text{II}.8)$$

qui montre que l'amortissement spatial est d'autant plus rapide que la fréquence angulaire ω est élevée. Les répartitions de température peuvent donc être exprimées par :

$$0 < r < b \quad T(r) = T_1 + A\ \text{Ber}\,(\sigma_f r) \quad \text{dans le coeur}$$

(la fonction Ker est éliminée à cause de sa divergence à l'origine) et dans la gaine

$$b < r < a \quad T(r) = B\ \text{Ber}(\sigma_f r) + C\ \text{Ker}(\sigma_f r)$$

A, B, C sont des constantes numériques qui doivent être

déterminées à l'aide des conditions aux limites concernant les grandeurs thermiques.

Dans les équations (II-5) et (II-6) intervient la diffusivité $\chi_f = K_f/\rho_f C_f$ de la fibre et aucune distinction n'est faite, dans ce modèle entre les paramètres thermiques du coeur et de la gaine.

Bien que la diffusivité de la fibre soit certainement différente de celle de la silice pure (présence de dopants en quantité non négligeable, étirage de la fibre), ce paramètre sera par contre supposé indépendant de la coordonnée radiale r. Notons que la méthode que nous proposons plus loin pour mesurer χ_f ne fournira en conséquence qu'une valeur moyenne de la diffusivité. Etant données les méthodes de fabrication des fibres optiques (CVD, MCVD pour les plus courantes) on peut considérer le contact coeur-gaine suffisamment intime pour écrire la continuité de la température T(r) et du flux de chaleur. Celà exprime que la chaleur sortant du premier milieu entre intégralement dans le second milieu. La quantité de chaleur δQ qui traverse la surface élémentaire dS par unité de temps étant

$$\delta Q = - K \overrightarrow{\text{grad}}\, T \cdot \overrightarrow{dS}$$

la continuité du flux se traduira par la conservation de la quantité

$$K \frac{dT}{dr}$$

puisque T ne dépend que de r. Ces deux conditions appliquées à l'interface coeur-gaine fournissent les relations :

$$T_1 + A\,\text{Ber}(\sigma_f b) = B\,\text{Ber}(\sigma_f b) + C\,\text{Ker}(\sigma_f b) \quad \text{(II-9)}$$

pour la température et pour le flux.

$$A\,\text{Ber}'(\sigma_f b) = B\,\text{Ber}'(\sigma_f b) + C\,\text{Ker}'(\sigma_f b)$$

../..

Ces deux conditions aux limites ne suffisent pas à déterminer les trois constantes ; une relation de plus peut-être obtenue en utilisant l'interface gaz-fibre.

Auparavant, il est donc nécessaire de trouver la répartition de température dans le gaz.

II-3 Etude thermodynamique du gaz

II-3-1 - Variables utilisées dans le gaz.

Du point de vue thermique, la distribution radiale de température $T(r)$ caractérisera l'état du gaz, comme dans le cas des solides. En ce qui concerne les propriétés mécaniques, la contrainte, qui n'est autre que la pression sera utilisée plus simplement que d'autres variables telles que déplacement ou potentiel. Plus précisément, on utilisera la variation de pression p (r) différence P - Po entre la pression du gaz et la pression statique Po.

II-3-2- Equations thermodynamiques

Les équations qui régissent les variations de température T (r) et de pression p(r) sont aussi des équations couplées (29) :

$$\Delta p = \frac{\gamma}{c_g^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \ell'_\infty c_g \frac{\partial}{\partial t}\Delta\right](p - \alpha T) \qquad \text{(II-11)}$$

et

$$\Delta T = \frac{1}{\chi_g}\frac{\partial}{\partial t}\left[T - \frac{\gamma - 1}{\gamma\alpha} p\right] \qquad \text{(II-12)}$$

L'indice g se rapporte au gaz pour les grandeurs déjà définies. γ désigne le rapport des capacités calorifiques à volume constant et à pression constante, α est le coefficient de compressibilité à volume constant:

$\alpha = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V$ qui se réduit à P_0/T_0 pour un gaz parfait. Pour terminer, ℓ'_ω est une longueur caractéristique de la viscosité et du libre parcours moyen des molécules dans le gaz. Pour un gaz parfait elle s'exprime par (29) (en mètres) :

$$\ell'_\omega = \frac{2}{3} 10^{-7} \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

Ce qui pour l'air considéré comme gaz diatomique ($\gamma = 7/5$) donne $\ell'_\omega = 5.6\ 10^{-2}$ µm.

Les solutions cherchées pour les équations (II-11) et (II-12) sont harmoniques et $\partial/\partial t \equiv i\omega$ ce qui conduit à

$$\Delta p \left(1 + \frac{i\gamma\omega\ell'_\omega}{c_g}\right) + \frac{\gamma\omega^2}{c_g^2} p - \frac{i\omega\alpha\gamma\ell'_\omega}{c_g} \Delta T - \frac{\gamma\alpha\omega^2}{c_g^2} T = 0 \quad \text{(II-13)}$$

et

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi_g} T + i \frac{\gamma - 1}{\gamma\alpha} \frac{\omega}{\chi_g} p = 0 \quad \text{(II-14)}$$

II-3-3 Répartition de température dans le gaz

Un gaz étant fortement compressible, aucune approximation concernant ses dilatations ne peut-être faite à priori. Il est donc nécessaire de résoudre les équations couplées (II-13) et (II-14). Les solutions cherchées étant radiales, nous sommes conduits à introduire de nouveau les fonctions de Bessel d'ordre zéro qui seront désignées par $Z_0(kr)$, k étant une constante de propagation à déterminer. Ces fonctions vérifient de façon générale (28) :

$$\Delta Z_0(kr) = -k^2 Z_0(kr) \quad \text{(II-15)}$$

../..

Les variations de pression p(r) et de température T(r) seront cherchées sous la forme :

$$p(r) = A_p \, Z_0(kr) \qquad \text{et} \qquad T(r) = A_T \, Z_0(kr)$$

En reportant ces deux expressions dans les équations II-13 et II-14 compte-tenu de la propriété (II-15), on obtient le système linéaire homogène :

$$\left[-k^2 \left(1 + \frac{i\omega\gamma\rho'_v}{c_g} \right) + \frac{\gamma\omega^2}{c_g^2} \right] A_p + \left[\gamma\alpha \left(\frac{i\omega\rho'_v k^2}{c_g} - \left(\frac{\omega}{c_g} \right)^2 \right) \right] A_T = 0$$

et

$$\left[i \, \frac{\gamma - 1}{\gamma\alpha} \, \frac{\omega}{\chi_g} \right] A_p - \left[k^2 + i \, \frac{\omega}{\chi_g} \right] A_T = 0$$

qui admet d'autres solutions que la solution triviale nulle à condition que son déterminant soit nul ce qui conduit pour k à l'équation bicarrée :

$$\left(1 + i\gamma\varepsilon_v \right) k^4 + k^2 \, \frac{i\omega}{\chi_g} \left(1 + i\varepsilon_v + i\gamma\varepsilon_h \right) - \gamma \left(\frac{\omega}{c_g} \right)^2 \frac{i\omega}{\chi_g} = 0 \qquad (II\,16)$$

où on a posé

$$\varepsilon_v = \frac{\omega\rho'_v}{c_g} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_h = \frac{\omega\chi_g}{c_g^2}$$

Si la fréquence n'est pas trop élevée ces nombres sont petits devant 1 (Les valeurs sont à 1kHz $\varepsilon_v = 1{,}1\ 10^{-6}$ et $\varepsilon_h = 1.2\ 10^{-6}$) La résolution de l'équation (II-16) conduit alors, à l'ordre un en ε_v et ε_h aux solutions (29).

$$k_1^2 = k_g^2 = \left(\frac{\omega}{c_g} \right)^2 \left(1 - i\varepsilon_v - i(\gamma - 1)\varepsilon_h \right) \qquad (II\text{-}17)$$

et

$$k_2^2 = -i\sigma_g^2 = -\frac{i\omega}{\chi_g} \left[1 + i(\gamma - 1)(\varepsilon_v - \varepsilon_h) \right]$$

Etant donnés les ordres de grandeur de ε_v et ε_h on peut se limiter à l'ordre zéro pour les constantes de propagation :

$$k_g = \frac{\omega}{c_g}$$

et

$$k_2^2 = -i\sigma_g^2 = -i\frac{\omega}{\chi_g}$$

Ces constantes de propagation correspondent respectivement au mode acoustique et au mode thermique que nous allons maintenant expliciter.

Le mode dit acoustique est celui pour lequel la conduction de la chaleur, ou sa diffusion est négligeable ce qui conduit d'après l'équation (II-12) à

$$T \simeq \frac{\gamma - 1}{\gamma \alpha} p \qquad \text{(II-18)}$$

En reportant cette relation dans l'équation (II-11) et en négligeant les effets de viscocité, cette dernière devient en régime harmonique

$$\Delta p + \left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2 p = 0$$

qui n'est autre que l'équation de propagation du son faisant intervenir la vitesse de propagation abiabatique, la conduction de la chaleur, donc les échanges thermiques étant négligés dans ce cas. Pour ce mode, la relation entre la pression p_{ac} et la température T_{ac} est obtenue en reportant les expressions

$$p_{ac}(r) = A_p Z_0(k_g r)$$

et

$$T_{ac}(r) = A_T Z_0(k_g r)$$

dans l'équation (II-11). On obtient alors :

$$a_g \, p_{ac}(r) = T_{ac}(r)$$

avec

$$a_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma \alpha} \left(1 + i \varepsilon_h\right) \qquad \text{(II-19)}$$

qui est l'expression (II-18) corrigée au premier ordre en ε_h L'expression complète des solutions du mode acoustique peuvent alors être données :

$$p_{ac}(r) = F \, J_0(k_g r) + G \, Y_0(k_g r)$$

et

$$T_{ac}(r) = a_g \, p_{ac}(r)$$

Jo et Yo étant des fonctions de Bessel d'ordre zéro de première espèce (28). Notons que ce mode acoustique est celui qui n'existe pas dans les solides que nous avons supposés indilatables.

Le mode thermique, par contre a déjà été rencontré dans les solides ; dans ce cas, la diffusion de la chaleur est prépondérante et les variations de pression sont faibles. L'équation (II-12) devient équation de diffusion de la chaleur :

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi_g} T = 0$$

déjà rencontrée. La constante de propagation $k_2^2 = -\frac{i\omega}{\chi_g}$ conduit pour ces ondes thermiques à des combinaisons linéaires des fonctions Ber ($\sigma_g r$) et Ker ($\sigma_g r$) (fonctions de Kelvin) dont les caractéristiques ont été données à propos des solides. La température a donc pour expression et la pression

$$T_{th}(r) = D \, \mathrm{Ker}(\sigma_g r) + E \, \mathrm{Ber}(\sigma_g r)$$

qui lui est proportionnelle s'écrit :

$$p_{HR}(r) = t_g \, T_{HR}(r)$$

le coefficient t_g étant déterminé de façon analogue à a_g à l'aide de l'expression II-11.

$$t_g = -i \gamma \alpha \, (\varepsilon_h - \varepsilon_v)$$

Finalement, la pression et la température sont la somme des contributions des deux modes.

$$p(r) = F J_0(k_g r) + G Y_0(k_g r) + t_g [D \, Ker(\sigma_g r) + E \, Ber(\sigma_g r)]$$

et

$$T(r) = a_g [F J_0(k_g r) + G Y_0(k_g r)] + D \, Ker(\sigma_g r) + E \, Ber(\sigma_g r)$$

Les constantes D, E, F, G doivent être déterminées à l'aide des conditions aux limites.

Le coefficient de couplage t_g traduisant les effets de pression consécutifs à la diffusion de la chaleur est très faible ($|t_g| = 4.10^{-8}$ °C/Pa à 1 kHz) ; il est lié aux phénomènes de transport dans les gaz, conduction thermique et viscosité. L'autre coefficient a_g est, lui aussi, faible et de plus indépendant de la fréquence à l'ordre zéro en ε_h ($a_g = 8.5\ 10^{-4}$ Pa/°C). Il traduit les variations de température dues à la propagation de la surpression d'une onde acoustique. On peut donc prévoir, compte-tenu de ces ordres de grandeur que la pression sera déterminée par le mode acoustique ($p_{ac} \gg p_{HR}$) et que la température le sera par le mode thermique T_{HR}. Celà est confirmé par les résultats numériques du calcul complet présenté en annexe III. Typiquement, on obtient à quelques dizaines de hertz

$p \simeq 10^{-4}$ Pa et $T = 10^{-5}$ °C qui avec les valeurs de $a_g = 8.5\ 10^{-4}$ Pa/°C et $t_g = 4\ 10^{-8}$ °C/Pa montrent que ces prévisions sont correctes. La température dans le gaz a donc pour

../..

expression :

$$T(r) = D\ \mathrm{Ker}(\sigma_g r) + E\ \mathrm{Ber}(\sigma_g r)$$

Supposant le contact intime entre le gaz et la fibre, on pourra écrire la continuité de la température et du flux de chaleur de la même façon qu'à l'interface coeur-gaine, les échanges par rayonnement et par conduction étant négligés après la discussion du paragraphe (II-1-3). Cependant, on ne dispose que de quatre relations pour déterminer les cinq constantes A, B, C, D, E. La dernière condition demande une distinction entre la cellule photoacoustique et la photodéviation.

Cette dernière est la plus simple. Pour $r > a$, le milieu est infini (milieu ambiant) et la composante Ber ($\sigma_g r$) doit être éliminée à cause de sa divergence quand r devient grand, ce qui conduit à poser E = 0 comme cinquième condition.

Dans ce cas où il existe une paroi, celle de la cellule une interface supplémentaire existe pour r = R entre le gaz et la cellule. A l'intérieur de celle-ci, milieu solide, nous connaissons la répartition de température (paragraphe (II-2-3)), combinaison linéaire des fonctions Ber ($\sigma_p r$) et Ker ($\sigma_p r$). Cette paroi joue alors le rôle de milieu extérieur pour lequel la condition d'onde sortante élimine la solution Ber ($\sigma_p r$) ; la problème comporte donc six constantes calculées avec les six conditions aux limites qui sont continuité de la température et du flux de chaleur aux trois interfaces qui conduisent donc à une solution unique.

Les calculs analytiques, dans ce cas assez lourds, masquent les résultats simples qui peuvent être obtenus par quelques considérations physiques. La répartition de température dans le gaz est représentée sur la figure (II-3). Pour des fréquences élevées, l'amplitude de ces variations de température

décroit de façon monotone, cette décroissance étant caractérisée par la longueur de diffusion thermique :

$$\frac{1}{\sigma_g} = \left(\frac{\chi_g}{\omega}\right)^{1/2}$$

Lorsque la fréquence de modulation diminue, la longueur de diffusion $1/\sigma_g$ augmente et devient comparable au rayon R de la cellule ce qui entraine une contribution appréciable de l'onde thermique réfléchie (Ber ($\sigma_g r$)). Ce problème est analogue à celui de l'onde évanescente dans une milieu fini, une couche mince par exemple. Si l'épaisseur de la couche est grande devant la profondeur de pénétration de l'onde, la couche se comporte comme un milieu infini, sinon une onde réfléchie apparaît.

Par conséquent, pour éviter les effets de paroi, traduits par la présence d'une onde réfléchie, le domaine de fréquences exploré sera choisi de telle sorte que :

$$\frac{1}{\sigma_g} \ll R$$

ce qui dans l'air et pour R = 5 mm conduit à $\nu > 1$ Hz. Puisque la contribution de l'onde réfléchie E Ber ($\sigma_g r$) est négligeable, la répartition de température est dans tous les cas :

$$T(r) = \mathcal{D}\ \mathrm{Ker}\,(\sigma_g r)$$

Les relations de continuité à l'interface gaine-gaz sont alors

$$\mathcal{B}\ \mathrm{Ber}\,(\sigma_f a) + C\ \mathrm{Ker}\,(\sigma_f a) = \mathcal{D}\ \mathrm{Ker}\,(\sigma_g a)$$

pour la température et

$$\mathcal{B}\ K_f \sigma_f\ \mathrm{Ber}'(\sigma_f a) + C\ K_f \sigma_f\ \mathrm{Ker}'(\sigma_f a) = \mathcal{D}\ K_g \sigma_g\ \mathrm{Ker}'(\sigma_g a)$$

pour le flux.

../..

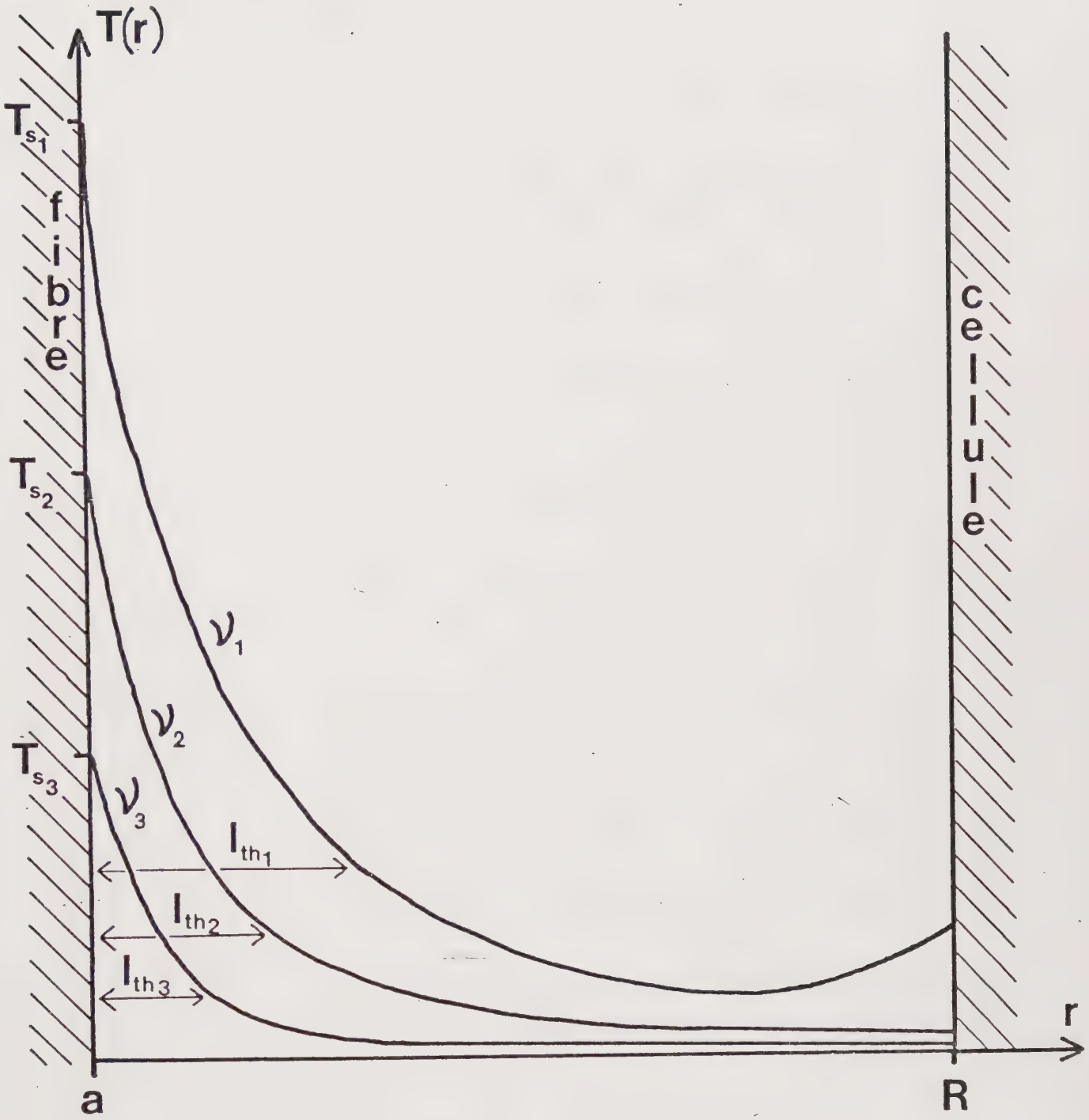


figure II.3 répartition de température dans le gaz.

Ces deux relations jointes aux deux autres (II-9 et II-10) permettent de déterminer toutes les constantes A, B, C, D.

II-3-3 - Détermination de la température de surface de la fibre

Rappelons la forme générale de la répartition de température dans la fibre et dans le gaz

$$0 < r < b \qquad T(r) = T_1 + A\, Ber(\sigma_f r)$$

$$b < r < a \qquad T(r) = B\, Ber(\sigma_f r) + C\, Ker(\sigma_f r)$$

$$r > a \qquad T(r) = D\, Ker(\sigma_g r)$$

Les constantes A, B, C, D sont alors déterminées par la relation matricielle

$$\begin{bmatrix} Ber(\sigma_f b) & -Ber(\sigma_f b) & -Ker(\sigma_f b) & 0 \\ Ber'(\sigma_f b) & -Ber'(\sigma_f b) & -Ker'(\sigma_f b) & 0 \\ 0 & Ber(\sigma_f a) & Ker(\sigma_f a) & -Ker(\sigma_g a) \\ 0 & K_f\sigma_f\, Ber'(\sigma_f a) & K_f\sigma_f\, Ker'(\sigma_f a) & -K_g\sigma_g\, Ker'(\sigma_g a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De façon à faire intervenir la température de surface de la fibre $T_s = T(a)$, la répartition de température dans le gaz est mise sous la forme :

$$T(r) = \frac{T_s}{Ker(\sigma_g a)}\, Ker(\sigma_g r)$$

../..

La résolution du système linéaire (II-20) conduit alors à :

$$T_S = T_1 \frac{b}{a} \frac{K_f \sigma_f \, Ber'(\sigma_f b) \, Ker(\sigma_g a)}{K_f \sigma_f \, Ber'(\sigma_f a) \, Ker(\sigma_g a) - K_g \sigma_g \, Ker'(\sigma_g a) \, Ber(\sigma_f a)} \quad (II.21)$$

Comme nous le constaterons et le commenterons plus loin, le signal photoacoustique décroit avec la fréquence de modulation. Aussi, pour des raisons de détection expérimentale, le domaine de fréquences exploré sera limité à 1Hz - 1kHz . Dans cette zone la contribution du second terme du dénominateur de l'expression (II-21) est environ cent fois plus faible que la première. La température de surface se réduit alors à

$$T_S = T_1 \frac{b}{a} \frac{Ber'(\sigma_f b)}{Ber'(\sigma_f a)} \quad (II-22)$$

Cette température de surface d'échantillon, pour un diamètre a donné et un gaz donné détermine entièrement le signal photoacoustique ou photothermique puisqu'elle détermine alors la répartition de température T(r) dans le milieux gazeux.

En effet, la cellule ayant un volume constant, la donnée de T(r) fournit la pression p(r) donc le signal photoacoustique. Dans le cas de la photodéviation, la répartition de température et, en conséquence le gradient d'indice dans le gaz qui est responsable de la déviation d'un faisceau sonde. Nous présentons maintenant ces deux méthodes de détection des variations de température de surface T_s de l'échantillon induisant dans le gaz la répartition T(r).

II-4 Méthodes de détection de T_s

II-4-1 Détection photoacoustique

Dans ce cas, la répartition de température T(r) dans la cellule provoque, à volume constant des variations de pression p(r) qu'on se propose de calculer.

II-4-1-1 - Calcul du signal photoacoustique

La pression et la température vérifient les équations II-13 et II-14 :

$$\Delta p\left(1+\frac{i\omega\gamma\ell'_\nu}{c_g}\right)+\gamma\left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2 p-i\omega\frac{\gamma\alpha\ell'_\nu}{c_g}\Delta T-\gamma\alpha\left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2 T=0$$

et

$$\Delta T-\frac{i\omega}{\chi_g}T+i\frac{\gamma-1}{\gamma\alpha}\frac{\omega}{\chi_g}p=0$$

La combinaison de ces deux équations éliminant ΔT est

$$\Delta p\left(1+i\gamma\varepsilon_\nu\right)+p\left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2\left\{\gamma\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_h}\right)+\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_h}\right\}-\alpha\gamma T\left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_h}\right)=0 \quad (II-23)$$

Bien qu'au terme d'un calcul il apparaisse que $T_{ac} \ll T_{th}$ et $p_{th} \ll p_{ac}$ numériquement, on ne peut à priori négliger ces termes dans l'équation différentielle (II-23). Il faut donc considérer

$$T = T_{th} + T_{ac} \quad \text{et} \quad p = p_{ac} + p_{th}$$

avec

$$T_{ac} = a_g\, p_{ac} \quad \text{et} \quad p_{th} = t_g\, T_{th}.$$

on peut donc écrire :

$$T = T_{th}\left(1 - a_g t_g\right) + a_g p$$

Les termes a_g et t_g étant petits devant un, il vient

$$T = T_{th} + a_g p$$

en reportant cette expression dans l'équation II-23 en rappelant que, avec $\varepsilon_h \ll 1$, $a_g \simeq \frac{\gamma-1}{\gamma\alpha}$, on obtient :

$$\Delta p + \left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2 p = \alpha\gamma\left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_h}\right)T_{th}.$$

La température correspondant au mode thermique qui est prépondérante a été calculée au paragraphe (II-3-3)

$$T(r) = \frac{T_s}{\mathrm{Ker}(\sigma_g a)} \mathrm{Ker}(\sigma_g r)$$

ce qui conduit pour p (r) à l'équation

$$\Delta p + \left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2 p = \alpha\gamma \left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h}\right) \frac{T_s}{\mathrm{Ker}(\sigma_g a)} \mathrm{Ker}(\sigma_g r) \quad (II.24)$$

Cette équation est l'équation de propagation du son avec un second membre jouant le rôle de terme source et directement relié aux variations de température dans le gaz.

La solution générale de l'équation sans second membre

$$\Delta p + \left(\frac{\omega}{c_g}\right)^2 p = 0$$

est

$$p(r) = p_1 J_0(kr) + p_2 Y_0(kr) \quad \left(k = \frac{\omega}{c_g}\right)$$

et compte-tenu de

$$\Delta\left(\mathrm{Ker}(\sigma_g r)\right) = i\sigma_g^2 \mathrm{Ker}(\sigma_g r)$$

une solution particulière est donnée par $p_3 \mathrm{Ker}(\sigma_g r)$ avec

$$p_3 = \frac{\gamma\alpha k^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h}\right)}{\left(k^2 + i\sigma_g^2\right) \mathrm{Ker}(\sigma_g a)} T_s \quad (II-25)$$

La pression est donc de la forme

$$p(r) = p_1 J_0(kr) + p_2 Y_0(kr) + p_3 \mathrm{Ker}(\sigma_g r) \quad (II-26)$$

Les constantes p_1 et p_2 sont déterminées en écrivant que le déplacement $\vec{u}$ est nul sur la fibre (r = a) et sur la paroi (r = R) ce qui traduit le fait que les solides sont supposés rigides.

L'équation d'Euler

$$\rho_g \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = - \overrightarrow{grad}\, p$$

qui s'écrit en régime harmonique

$$\rho_g \omega^2 \vec{u} = \overrightarrow{grad}\, p$$

implique donc ici

$$\frac{dp}{dr}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dr}(R) = 0 \qquad (II-27)$$

les conditions (II-27) appliquées à la pression (II-26) conduisent à :

$$p_1 = p_3 \frac{\sigma_g}{k} \frac{Ker'(\sigma_g a)\, Y_1(kR) - Ker'(\sigma_g R)\, Y_1(ka)}{\Delta} \qquad (II.28.a)$$

$$p_2 = p_3 \frac{\sigma_g}{k} \frac{Ker'(\sigma_g R)\, J_1(ka) - Ker'(\sigma_g a)\, J_1(kR)}{\Delta} \qquad (II.28.b)$$

avec

$$\Delta = J_1(ka)\, Y_1(kR) - Y_1(ka)\, J_1(kR) \qquad (II.28.c)$$

Dans le domaine de fréquences considéré (1 Hz - 1 kHz) la contribution à la pression des termes contenant p_2 et p_3 est négligeable (au moins deux ordres de grandeur).

La pression est donc donnée par

$$p(r) = p_1 J_0(kr)$$

Les arguments des fonctions J_1 et Y_1 étant petits (ka $\simeq 10^{-4}$ et kR $\simeq 10^{-2}$) on peut écrire (28) :

$$J_1(x) \simeq \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad Y_1(x) \simeq - \frac{2}{\pi x}$$

../..

ce qui simplifie l'expression de Δ

$$\Delta \simeq \frac{R^2 - a^2}{\pi a R}$$

Les valeurs de $\sigma_g a$ et $\sigma_g R$ (respectivement 1 et 80) entrainent

$$\frac{|\,Ker'(\sigma_g a)\,|}{R} \gg \frac{|Ker'(\sigma_g R)|}{a}$$

l'expression de p(r) se simplifie alors pour donner :

$$p(r) = \frac{2i\gamma\alpha a}{(R^2-a^2)\sigma_g}\left(1 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h}\right) T_s \frac{Ker'(\sigma_g a)}{Ker(\sigma_g a)} J_o(kr)$$

Notons enfin qu'aux fréquences considérées (jusqu'à 1 kHz), la longueur d'onde acoustique, supérieure à 33 cm, reste grande devant le rayon de la cellule (R = 5mm). L'argument de la fonction Jo est alors petit devant un de telle sorte qu'elle vaut un. La pression est par conséquent uniforme à l'intérieur de la cellule et vaut (avec a $\ll$ R).

$$p = \frac{2i\gamma\alpha a}{R^2\sigma_g}\left(1 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h}\right) T_s \frac{Ker'(\sigma_g a)}{Ker(\sigma_g a)} \qquad (II-29)$$

Le terme ε_v, directement relié à la viscosité est petit devant un ($\varepsilon_v \simeq 10^{-8}$ à 1 kHz) ce qui conduit généralement à négliger les effets de viscosité dans l'équation (II-13) (30). Il apparait cependant sur l'expression (II-29) de p que pour négliger les effets dus à la viscosité, il faut que le rapport $\varepsilon_v/\varepsilon_h$, indépendant de la fréquence dans un large domaine ($\varepsilon_v/\varepsilon_h = c_g \ell'_v/\chi_g$), soit petit devant un. Dans l'air, il n'en est rien (le rapport vaut de 0.6 à 0.8 suivant les auteurs) et dans un liquide l'effet serait encore plus important. Par conséquent, la viscosité qui est un phénomène de transport au même titre que la conduction de la chaleur ne peut a priori être négligée.

Il est à noter que si on néglige ε_v, l'expression II-29

II-29 est celle obtenue par le modèle de Rosencwaig et Gersho (RG) (14) étendu à la géométrie cylindrique.

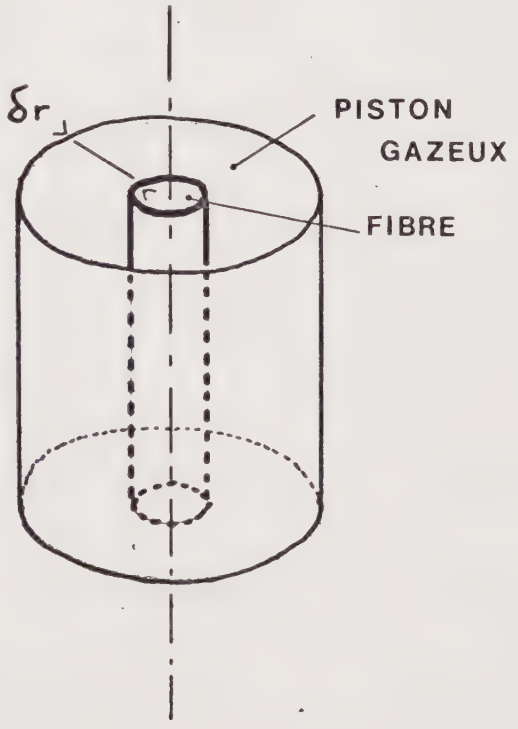
II-4-1-2 Extension du modèle R.G. à la symétrie de révolution

Ce modèle consiste à résoudre l'équation de diffusion de la chaleur dans les solides supposés parfaitement rigides, et dans le gaz.

La répartition de température dans le gaz est connue (paragraphe II-3-3).

$$T(r) = \frac{T_s}{\mathrm{Ker}(\sigma_g a)} \mathrm{Ker}(\sigma_g r)$$

L'amplitude T décroit en fonction de la distance à l'axe de la fibre. Conformément à la méthode R.G. on est conduit à définir un "piston gazeux" (ici un tube cylindrique entourant la fibre) qui, par ses dilatations impose au reste du gaz des



transformations adiabatiques. Soit δr , l'épaisseur de ce tube. Si, à priori dans une géométrie unidimensionnelle, l'épaisseur

du piston est suggérée par la présence de fonctions exponentielles pour la répartition de température ($\exp(-\sigma_g x)$), il n'en est pas de même avec les fonctions de Kelvin. Ceci n'a en fait aucune importance, le rayon r_p du piston étant choisi de la façon suivante (14) :

La température moyenne T dans le piston est définie par :

$$\overline{T} = \frac{T_s}{\pi \, Ker(\sigma_g a)(r_p^2 - a^2)} \int_a^{r_p} 2\pi r \, Ker(\sigma_g r) \, dr$$

et r_p est choisi de sorte que sa contribution à l'intégrale ci-dessus soit négligeable devant celle de a. Il est alors aussi simple de considérer l'intégrale de a à l'infini soit :

$$\overline{T} = \frac{T_s}{\pi \, Ker(\sigma_g a)(r_p^2 - a^2)} \int_a^{\infty} 2\pi r \, Ker(\sigma_g r) \, dr$$

Cette intégrale se calcule aisément (28) et on obtient :

$$\int_a^{\infty} 2\pi r \, Ker(\sigma_g r) \, dr = \frac{2\pi a}{\sigma_g} \, e^{-i\frac{\pi}{4}} \, K_1\left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sigma_g a\right)$$

K_1 étant une fonction de Bessel modifiée d'ordre 1. Compte-tenu de la relation :

$$K_1\left(e^{i\frac{\pi}{4}} x\right) = e^{3i\frac{\pi}{4}} \, Ker'(x)$$

on obtient la variation moyenne de température dans le piston gazeux :

$$\overline{T} = \frac{2 a i \, T_s}{(r_p^2 - a^2)\,\sigma_g} \, \frac{Ker'(\sigma_g a)}{Ker(\sigma_g a)}$$

../..

En supposant le gaz parfait, les variations de volume δV du piston sont (h désigne la longueur de la cellule)

$$\frac{\delta V}{h\pi(r_p^2 - a^2)} = \frac{\overline{T}}{T_0} \quad \text{soit} \quad \delta V = h\pi \frac{2ai}{\sigma_g} T_s \frac{Ker'(\sigma_g a)}{Ker(\sigma_g a)} \qquad (II.30)$$

La diffusion de la chaleur n'atteignant pratiquement pas le reste du gaz, celui-ci subit des transformations adiabatiques et pour un gaz parfait :

$$pV^\gamma = cste$$

si bien que les variations de pression p sont données par

$$\frac{p}{P_0} = \gamma \frac{\delta V}{h\pi(R^2 - a^2)}$$

qui, compte tenu de (II-30) et a $\ll$ R s'exprime par :

$$p = \gamma \frac{P_0}{T_0} \frac{2ia}{R^2 \sigma_g} T_s \frac{Ker'(\sigma_g a)}{Ker(\sigma_g a)}$$

Enfin, sachant que pour un gaz parfait $\alpha = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{P_0}{T_0}$,
le signal photoacoustique calculé suivant le modèle de R.G. est

$$p = \frac{2i\gamma\alpha a}{R^2 \sigma_g} T_s \frac{Ker'(\sigma_g a)}{Ker(\sigma_g a)} \quad \text{soit} \quad p = |p| e^{i\varphi_p} \qquad (II.31)$$

Comme nous l'avons souligné, cette expression est identique à (II-33) à condition de négliger la viscosité. Suivant l'un ou l'autre modèle, il ressort de ces résultats (II-29 ou II-31) que le signal photoacoustique est déterminé, pour un rayon a fixé, par la température de surface de l'échantillon, les autres coefficients dépendant du gaz et du rayon R de la cellule.

../..

Cette propriété est fondamentale en vue de l'étalonnage du système qui présente l'avantage de dispenser d'une évaluation absolue (il existe des différences suivant les modèles utilisés) du signal photoacoustique pour la mesure du coefficient d'absorption β . L'égalité des signaux dans le cas de la fibre et du fil chauffant se traduit par l'égalité des températures de surface des deux échantillons. Celà constitue une relation d'étalonnage qui est maintenant développée.

II-4-1-3- Relation d'étalonnage

D'aprés les remarques précédentes, il faut, pour établir cette relation d'étalonnage, déterminer la température de surface du fil.

Bien que le fil ait un coefficient de dilatation cent fois plus grand que celui de la fibre, les termes de couplage pour les équations thermoélastiques II-3 et II-4 restent faibles et les mêmes approximations quant à la rigidité de l'échantillon seront faites. Il suffit alors de résoudre l'équation de la chaleur :

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi_F} T = -U \qquad 0 < r < a_F \qquad \text{dans le fil}$$

et

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi_g} T = 0 \qquad r > a_F \qquad \text{dans le gaz}$$

contenant la densité de chaleur produite par effet Joule, bien connue dans le fil. En désignant par σ_e la conductivité électrique du fil et par I la valeur efficace du courant à la

../..

fréquence angulaire $\omega/2$,

$$U' = \frac{I^2}{2\gamma_e S_F^2 K_F} \qquad \text{(II-32)}$$

(l'indice F se rapporte au fil)

Le calcul est identique à celui mené pour la fibre à condition de réaliser b = a dans les résultats, ce qui conduit pour le fil à une température de surface

$$T'_s = T'_1 = \frac{-iI^2}{2\gamma_e S_F^2 \rho_F C_F \omega} \qquad \text{(II-33)}$$

Celle de la fibre étant (II-22) :

$$T_s = T_1 \frac{b}{a} \frac{Ber'(\sigma_f b)}{Ber'(\sigma_f a)} = -\frac{i\beta\phi_0}{2S\rho_f C_f \omega} \frac{b}{a} \frac{Ber'(\sigma_f b)}{Ber'(\sigma_f a)}$$

La relation d'étalonnage $T_s = T'_s$ (égalité des signaux) conduit donc à la proportionnalité entre $\beta\phi_0$ et I^2 :

$$\beta\phi_0 = \frac{1}{\gamma_e} \frac{\rho_f C_f}{\rho_F C_F} \frac{S}{S_F^2} \frac{a}{b} \frac{Ber'(\sigma_f b)}{Ber'(\sigma_f a)} I^2 \qquad \text{(II-34)}$$

Cette relation peut-être considérablement simplifiée après quelques considérations simples. La répartition de température dans le coeur de la fibre et dans sa gaine optique, donnée sur la figure (II-4) pour une fréquence de 5 Hz, montre que celle-ci est quasiment uniforme, la différence entre le centre et le bord étant 5°/₀₀. Ce résultat s'explique aisément si on remarque qu'à cette fréquence, la longueur de diffusion thermique dans la fibre $\sqrt{\frac{\chi_f}{\omega}}$ est grande devant le rayon de la fibre (60 µm). Cette remarque justifie en particulier le modèle adopté de répartition uniforme de la source de chaleur dans le coeur de la fibre. Elle montre en outre qu'il est inutile de connaître la répartition de l'énergie électromagnétique dans le coeur de la fibre et par là-même que la méthode

est applicable à des fibres otpiques monomodes ou multimodes, à gradient ou à saut d'indice.

Mathématiquement cette condition s'écrit :

$$\sigma_f a \ll 1 \quad \text{et} \quad \sigma_f b \ll 1$$

ce qui entraine pour la température de surface (II-22)

$$T_{s\,\text{approchée}} = T_1 \frac{b^2}{a^2}$$

Or b^2/a^2 est le rapport des sections droites du coeur et de la fibre. L'expressionII-7 de T_1 montre que la température de surface ainsi obtenue est celle qui correspondrait au terme source,

$$U = \frac{\beta \phi_0}{2 k_f \pi a^2}$$

ce qui revient à considérer l'énergie uniformément répartie dans toute la fibre de rayon a.

L'approximation ainsi réalisée est de l'ordre de 3 % (fig. II-4)

$$\frac{|T_{s\,\text{approché}}| - |T_s|}{|T_s|} \simeq 3\%$$

Dans ce cas la relation d'étalonnage II-34 se réduit à

$$\beta \phi_0 = \frac{1}{\gamma_e} \frac{\rho_f C_f}{\rho_F C_F} \frac{a^2}{\pi a_F^4} I^2 \qquad (II.35)$$

où a est le rayon extérieur de la fibre et a_F celui du fil.

Dans le domaine des basses fréquences, la longueur de diffusion dans la fibre reste petite devant son rayon et cette relation est valable. En pratique, il faut effectuer la mesure à quelques dizaines de hertz.

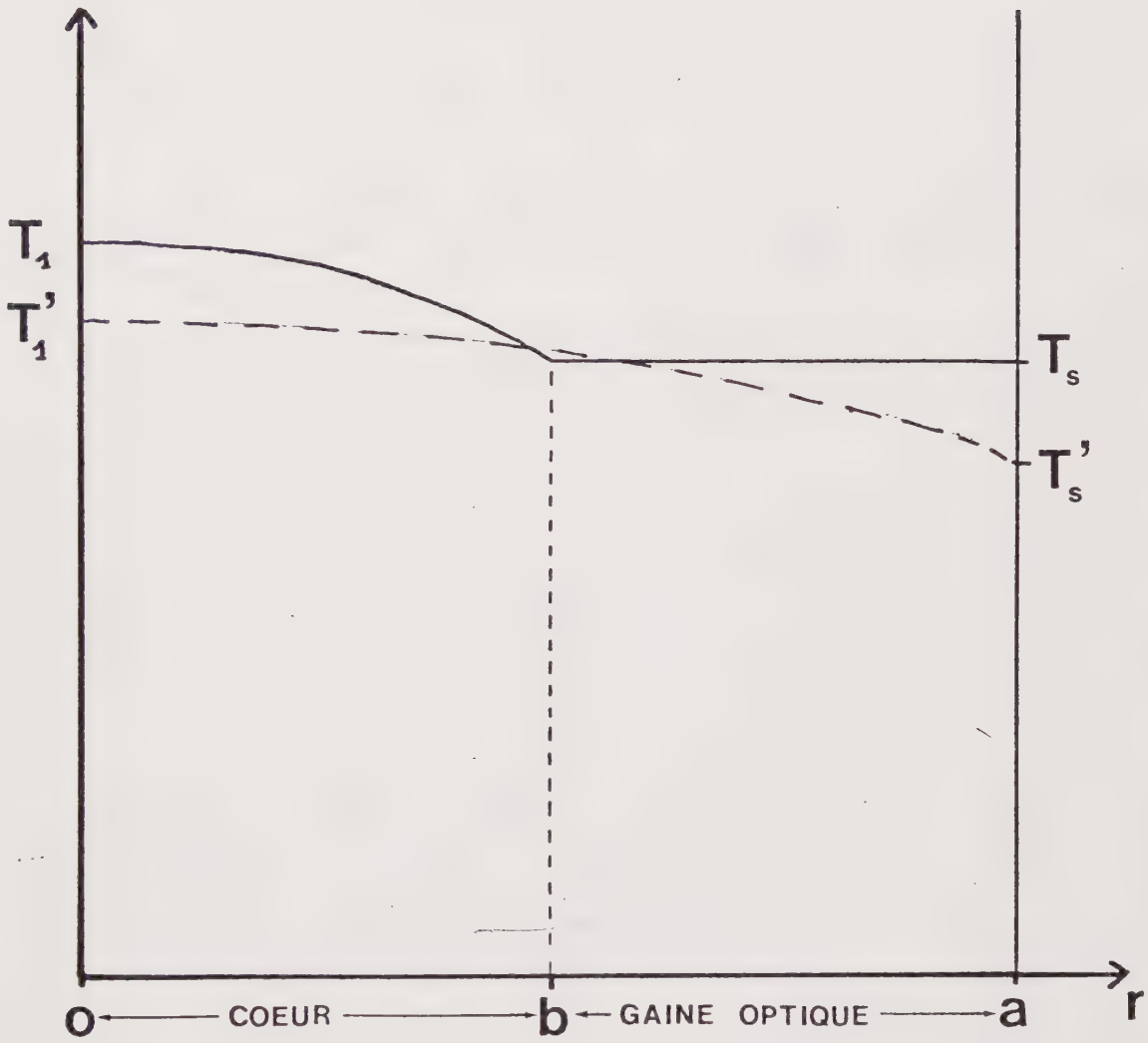


figure .II.4 : repartition de température dans la fibre.

La relation d'étalonnage (II-35) nécessite la connaissance des capacités calorifiques par unité de volume ρC du fil et de la fibre qui peuvent être déterminées par des méthodes microcalorimètriques.

Il faut par contre remarquer qu'elle est indépendante de la conductivité thermique difficile à mesurer sur un échantillon aussi fin par des méthodes classiques (31) ce qui est discuté au chapître I.

On peut enfin remarquer que la mesure du coefficient d'absorption β passe par celle de $\beta\phi_0$ donc de ϕ_0 .

En conclusion, la mesure du coefficient d'absorption β doit se faire à faible fréquence (quelques dizaines de Hz).

Elle consiste à égaliser les signaux obtenus dans le cas de la fibre et du fil. Dans ce cas, il y a, égalité des températures de surface des deux échantillons et le produit $\beta\phi_0$ est relié à la valeur efficace de l'intensité I du courant qui parcourt le fil par la relation (II-35) : $\beta\phi_0 \propto I^2$

Cette mesure de β se fait donc par l'étude de l'amplitude du signal photoacoustique. Comme le montre l'expression (II-29) ou (II-31) ce signal est déphasé par rapport à la modulation de la lumière. Nous présentons maintenant une étude plus détaillée du signal photoacoustique.

II-4-1-4 - Caractéristiques de l'amplitude du signal photoacoustique a pour une fréquence donnée.

L'amplitude de la température de surface et par suite l'amplitude du signal proportionnelle à la quantité $\beta\phi_0/S$

(relations II-7 et II-22) c'est-à dire à la densité d'énergie perdue par absorption dans la fibre.

Le guidage de la lumière à l'intérieur de l'échantillon constitue un avantage considérable car la source de chaleur est contenue dans un volume de très faible section S (diamètre de l'ordre de 120 µm). Bien que le coefficient d'absorption β soit faible, de l'ordre de 10^{-5} cm^{-1} ou 4,3 dB/km, ceci autorise, pour des flux ϕ_0 facilement disponibles au laboratoire, soit quelques centaines de milliwatts, des densités d'énergie importantes (10^4 W/cm^3). Pour de telles densités d'énergie, l'élévation de température modulée est environ 10^{-5} °C (pour une fréquence voisine de 100 Hz) ce qui laisse envisager une mise en oeuvre expérimentale (21).

Il faut noter ici que la limite de détectabilité de la méthode concerne le produit $\beta\phi_0$. La présence de sources puissantes à la longueur d'onde où l'on désire mesurer le coefficient d'absorption $\beta(\lambda)$ fait reculer le seuil pour cette grandeur.

b) Variation de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence

Il est maintenant bien connu que l'amplitude du signal photoacoustique est une fonction décroissante de la fréquence de modulation et ce en dehors des zones de résonance acoustique de la cellule. La décroissance est explicable simplement. D'un premier point de vue, quand ν augmente, la longueur de diffusion thermique dans la fibre diminue de sorte que la température de surface diminue et entraine la chute du signal photoacoustique (14). D'une autre façon, on peut remarquer que dans le gaz aussi, la longueur de diffusion thermique diminue . Le piston gazeux du modèle R.G., par ses dilatations alternatives, induit des variations de pression dans le reste du gaz ; une

diminution de son volume entraine donc une chute de l'amplitude des variations de pression qui représentent le signal photoacoustique.

Pour la simplicité de l'étalonnage, imposée par une longueur de diffusion thermique inférieure au rayon de la fibre, la fréquence de modulation doit être de quelques dizaines de hertz. Les variations de la pression en fonction de la fréquence $\nu = \omega/2\pi$ sont représentées sur la figure (II-5) variant de 1 Hz à 100 Hz. Elle montre que l'amplitude de p(R) est proportionnelle à $\omega^{-\alpha_0}$ ce qui peut s'exprimer par :

$$\log |p| = -\alpha_0 \log \omega + \text{cte.}$$

La pente α_0 de cette droite dépend en particulier des paramètres thermiques de la fibre K_f, C_f et de sa masse volumique ρ_f par la seule combinaison $K_f/\rho_f C_f$ de ces trois grandeurs. La pente α_0 dépend donc de la diffusivité thermique χ_f de la fibre. Notons que pour des valeurs de χ_f faibles (inférieures à 3.10^{-7} m²/s), la courbe log p = f(log ν) n'est plus une droite (figure II-6). Il a par contre été vérifié que les paramètres élastiques de la fibre (module d'Young, coefficient de Poisson) n'influent pas en général sur le signal à la suite des hypothèses faites concernant la rigidité de l'échantillon et le découplage des équations thermoélastiques (II-3 et II-4).

Le calcul complet tenant compte du couplage (annexe 3) est en accord avec ce résultat et valide, s'il était nécessaire ces hypothèses.

../..

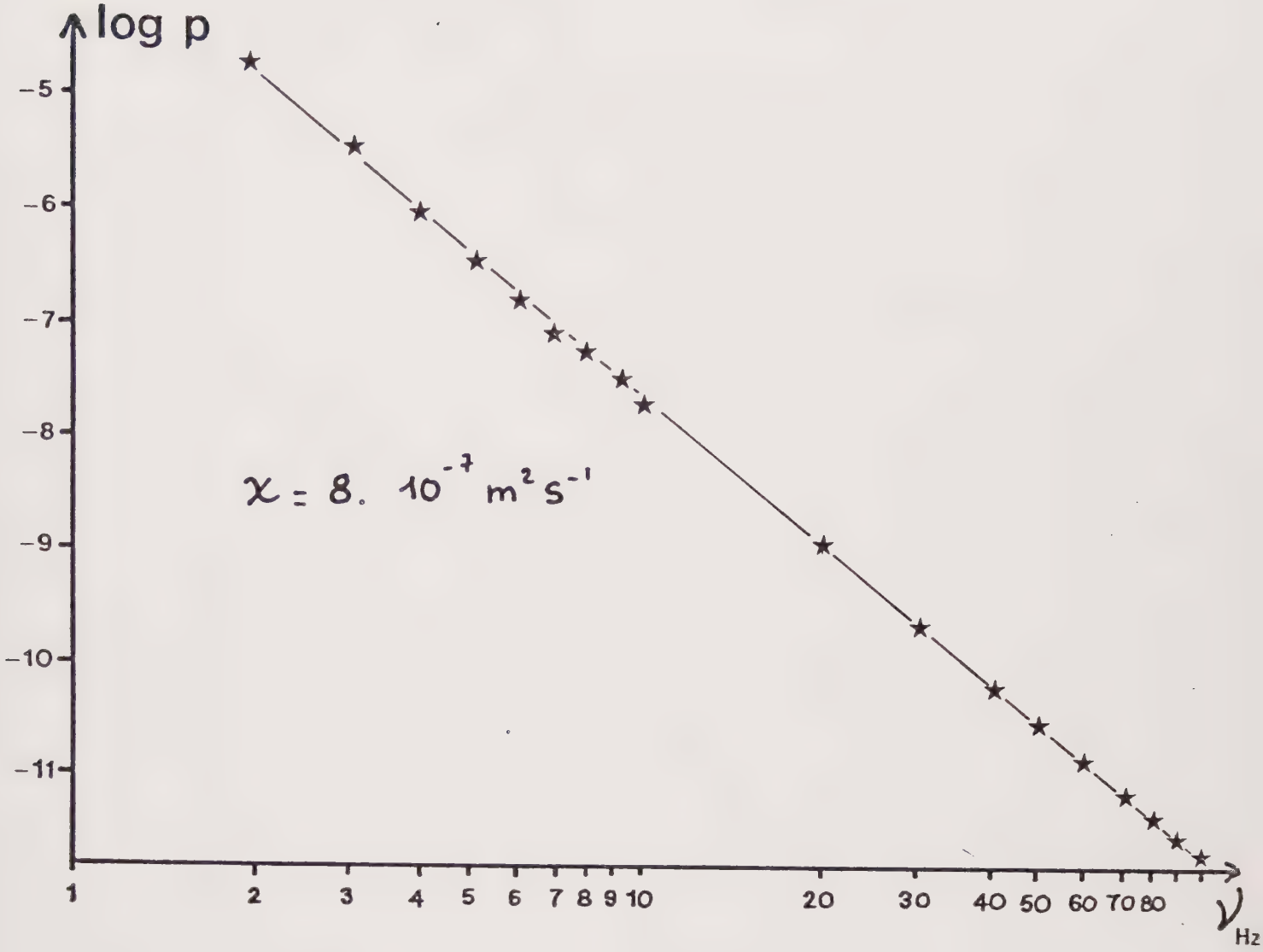

log p
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
$\chi = 8.\ 10^{-7}\ m^2 s^{-1}$
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
ν
Hz

figure . II . 5 .

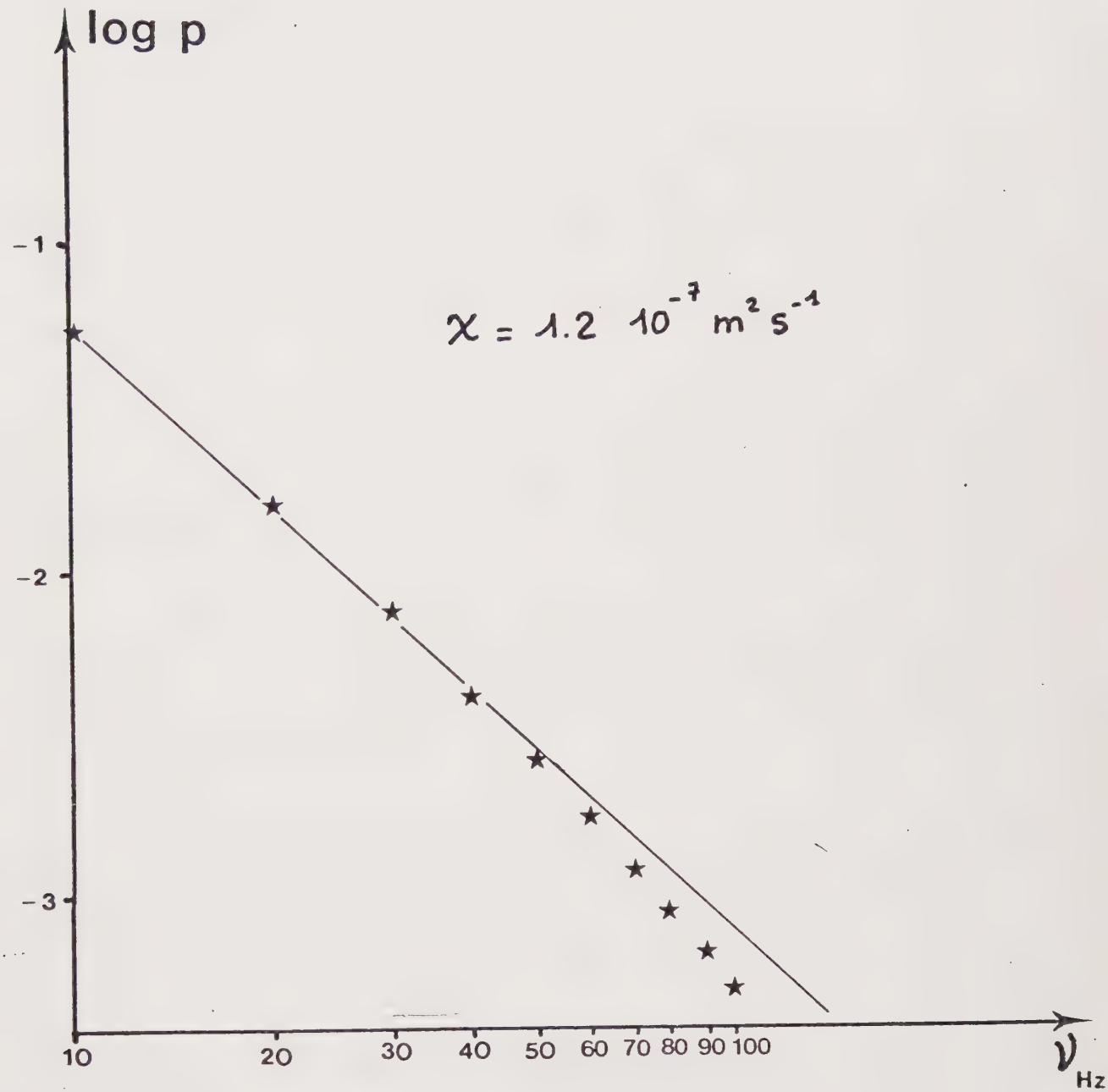


figure II.6

II-4-1-5 - Etude du déphasage du signal en fonction de la fréquence

La source de chaleur créée par absorption de lumière se trouve dans le coeur de la fibre. Aussi, cette chaleur doit diffuser à travers la gaine optique avant d'atteindre le gaz. Lorsque cette source est modulée, il apparaît donc un déphasage φ entre la modulation de la lumière et le signal photo-acoustique.

La phase de la pression p, reliée à T_s est représentée en tant que fonction de la racine carrée de la fréquence $\sqrt{\nu}$ sur la figure II-7, pour différentes valeurs de la diffusivité thermique α_f de l'échantillon.

Pour une valeur fixée de la diffusivité, il apparaît qu'au dessus d'une certaine fréquence, que nous appellerons fréquence caractéristique $\nu_c(\alpha_f)$, la phase φ est une fonction linéaire de $\sqrt{\nu}$.

Ce comportement est intimement lié à la répartition de température à l'intérieur de la fibre. Au-delà de quelques dizaines de Hz, celle-ci ne peut plus être considérée comme uniforme car la longueur de diffusion thermique dans la silice devient inférieure au rayon de la fibre.

Plus précisément, la répartition de température T(r) dans la gaine optique est la combinaison linéaire d'une fonction Ber ($\sigma_f r$) et d'une fonction Ker ($\sigma_f r$) qui sont la représentation mathématique d'une onde thermique réfléchie sur l'interface gaine-gaz et d'une onde thermique sortante.

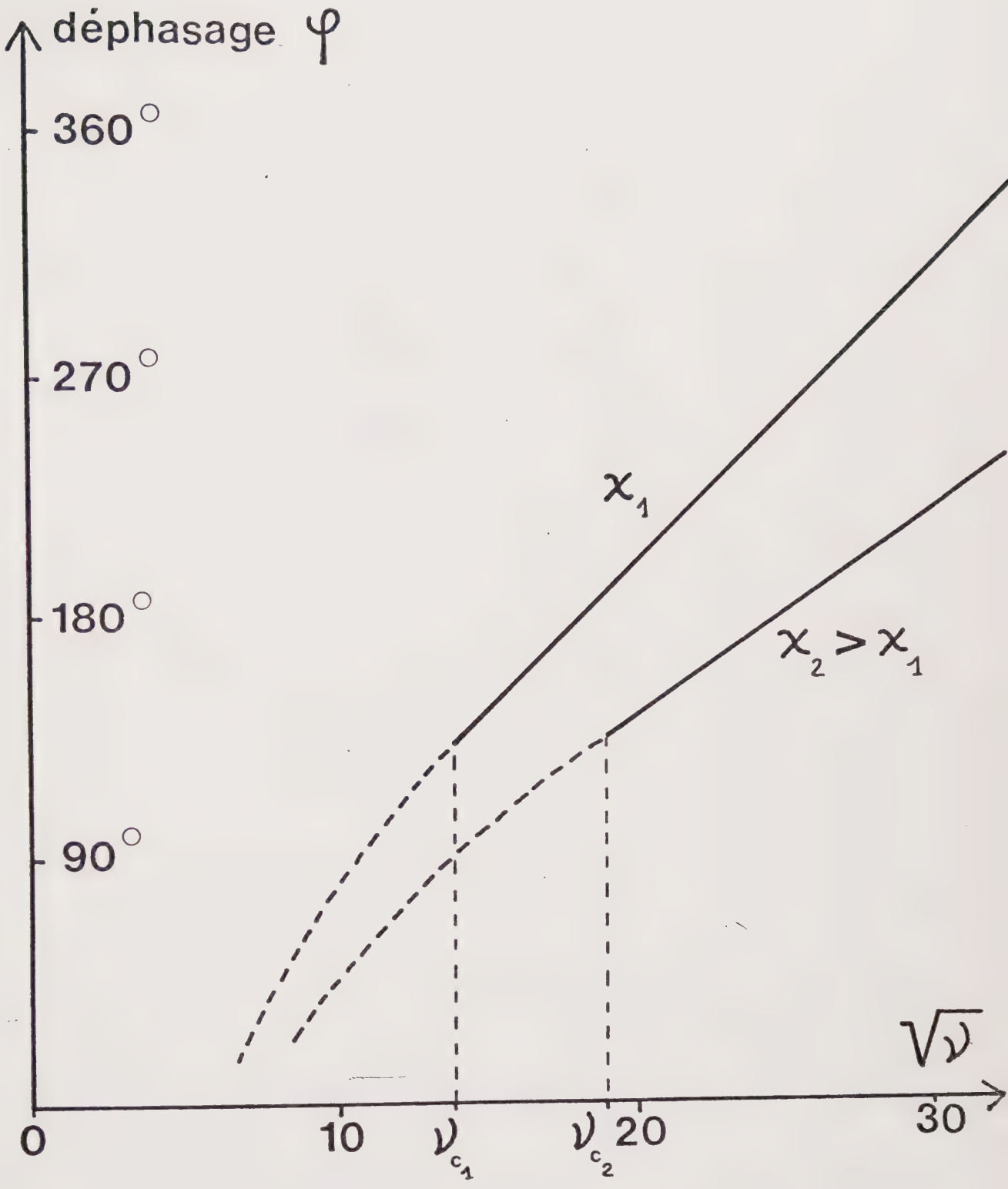
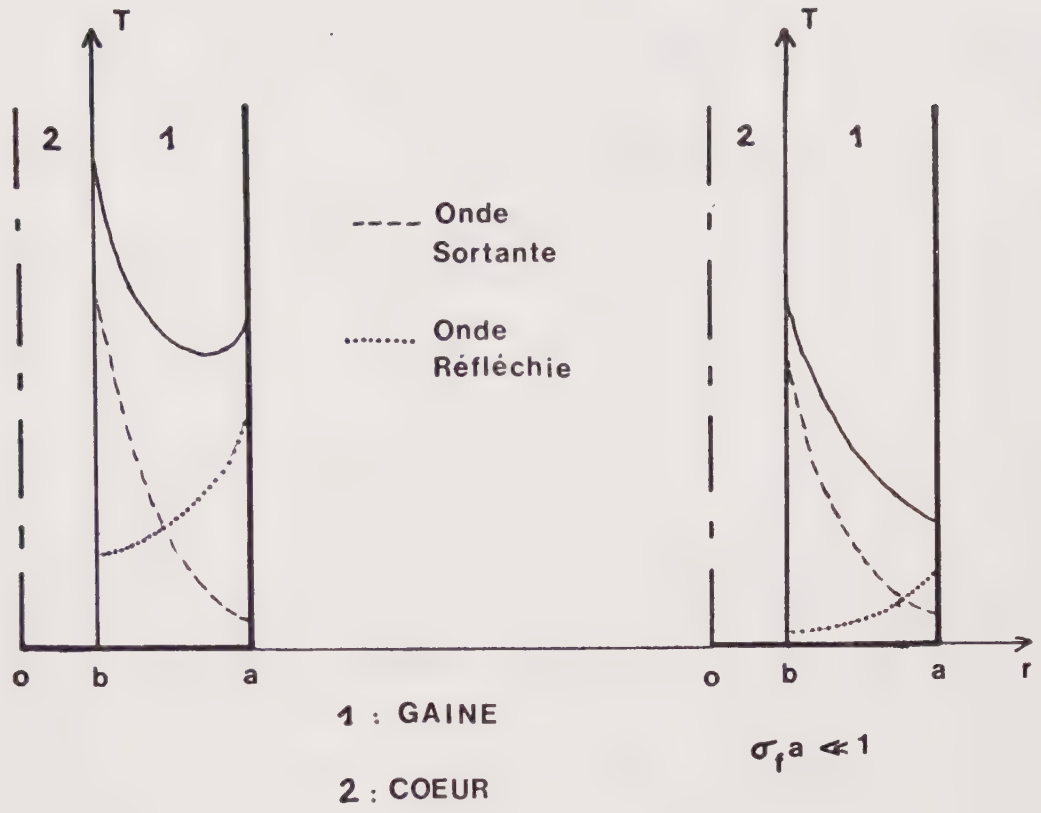

déphasage φ
360°
270°
180°
90°
0
10
ν_{c_1}
ν_{c_2}
20
30
$\sqrt{\nu}$
χ_1
$\chi_2 > \chi_1$

figure II.7



Lorsque la fréquence augmente, au-delà de la fréquence caractéristique ν_c, la longueur de diffusion thermique $\sqrt{\chi_f/2\pi\nu}$ qui caractérise l'amortissement de l'onde thermique sortante devient petite devant l'épaisseur (a - b) de la gaine optique. La très faible amplitude de l'onde sortante à la surface de la fibre donne alors naissance à une onde réfléchie (Ber ($\sigma_f r$)) d'amplitude négligeable. En conséquence, la phase du signal est imposée par celle de l'onde sortante Ker ($\sigma_f r$)) et, la longueur de diffusion thermique $1/\sigma_f$ étant petite devant l'épaisseur (a - b) l'argument $\sigma_f r$ est inférieur

à l'unité. Dans ce cas (28) :

$$e^{i\omega t}\,\mathrm{Ker}(\sigma_f r) \sim e^{-i\frac{\pi}{4}}\,\frac{e^{-\frac{\sigma_f r}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi\sigma_f r}}\,e^{i\left(\omega t-\frac{\sigma_f r}{\sqrt{2}}\right)} \qquad (II-36)$$

Cette expression est celle d'une onde cylindrique divergente dont la phase est proportionnelle à la racine

$$\frac{\sigma_f r}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\chi_f}}\,\sqrt{\nu}\,r$$

carrée de la fréquence $\sqrt{\nu}$. Il est à noter qu'on retrouve ici la phase d'une onde thermique dans le cas unidimensionnel pour lequel de tels résultats ont été soulignés théoriquement et observés expérimentalement (24). L'expression (II-36), qui a l'intérêt de justifier le comportement de $\varphi(\sqrt{\nu})$ déterminé numériquement a de plus l'avantage de souligner le fait que la pente de la droite $\varphi(\sqrt{\nu})$ est une fonction de la diffusivité thermique χ_f de la fibre et plus précisément de $1/\sqrt{\chi_f}$. Ce résultat qui apparaissait qualitativement sur la figure (II-7) permet donc de mettre au point une méthode de mesure de la diffusivité thermique de la fibre. Une étude expérimentale du déphasage φ entre le signal et la modulation en fonction de la fréquence ν pour des valeurs supérieures à la fréquence caractéristique ν_c (de l'ordre de 200 Hz), permet de déterminer la pente de la droite $\varphi(\sqrt{\nu})$ et ainsi d'atteindre la diffusivité de la fibre χ_f à l'aide de la droite donnée en figure (II-8).

Il faut remarquer que cette méthode consiste en fait en un ajustement numérique de la pente de $\varphi(\sqrt{\nu})$ basée sur un modèle. Cependant, si l'intervention d'un modèle était gênante pour la mesure de l'amplitude du signal, elle ne l'est pas pour la phase car l'origine de celle-ci tient dans la diffusion de la

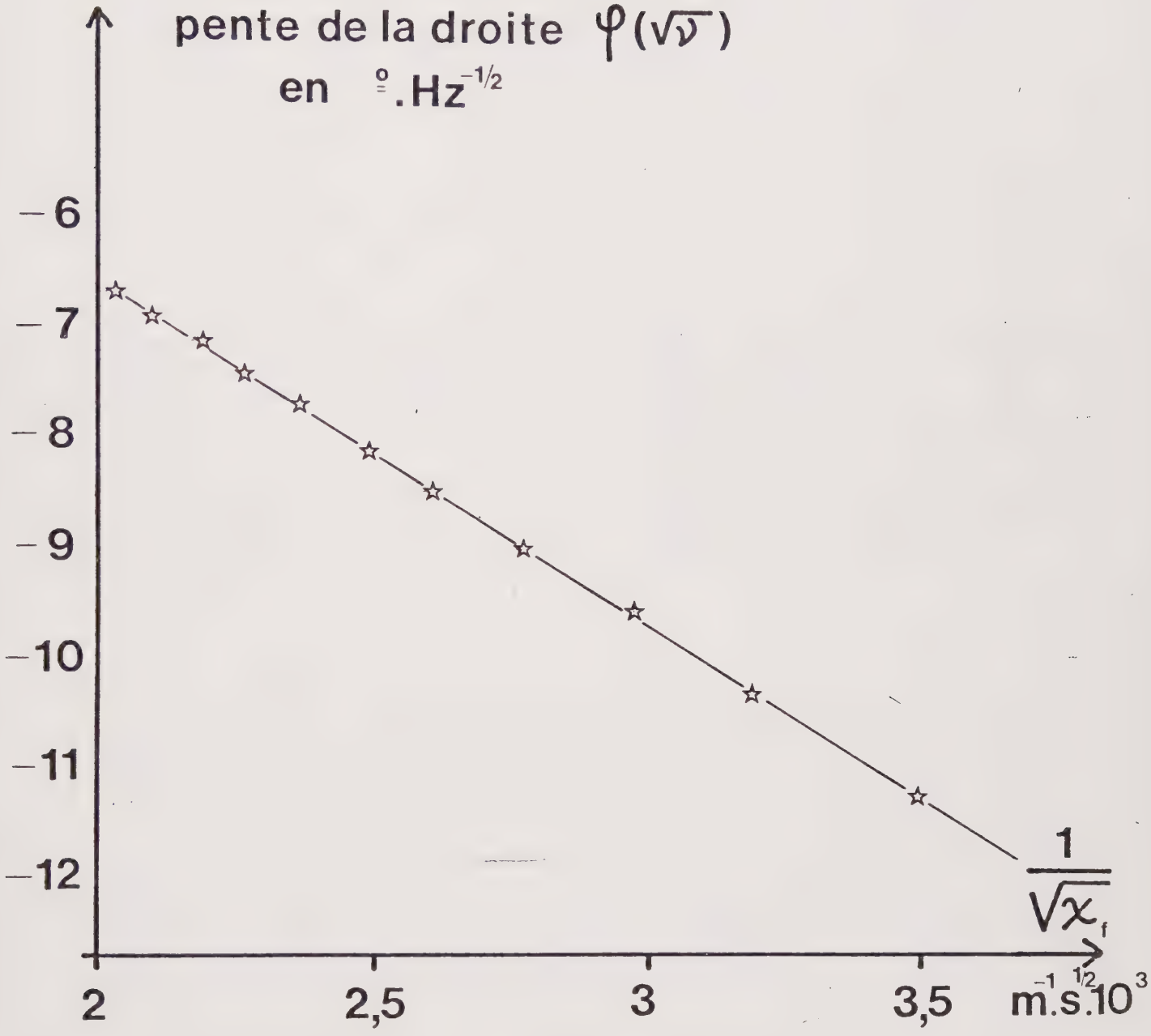
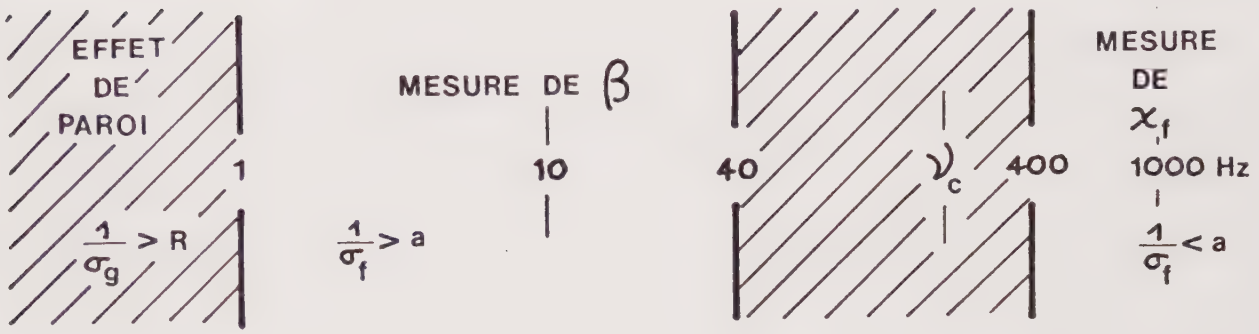

pente de la droite $\varphi(\sqrt{\nu})$
en °.Hz$^{-1/2}$
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
$\frac{1}{\sqrt{\chi_f}}$
2
2,5
3
3,5
m^{-1}.s$^{1/2}$.10^3

figure II.8

chaleur, phénomène physique indispensable à l'élaboration d'un modèle pour l'effet photoacoustique.

Le domaine de fréquences à explorer pour l'étude de la phase en vue de la mesure de la diffusivité thermique χ_f est disjoint de celui concerné par la mesure du coefficient d'absorption β . Ceci peut-être résumé par le schéma suivant :



Enfin, si la méthode proposée ici permet de discriminer les causes d'atténuation dans la fibre optique (principalement absorption et diffusion Rayleigh), il est nécessaire de vérifier que la lumière diffusée n'intervient pas. Cependant, il est néanmoins évident qu'une partie de la lumière diffusée, si ce n'est la totalité, est absorbée par la paroi de la cellule. De cette façon, la lumière diffusée peut donner lieu à un signal de pression cohérent avec la modulation.

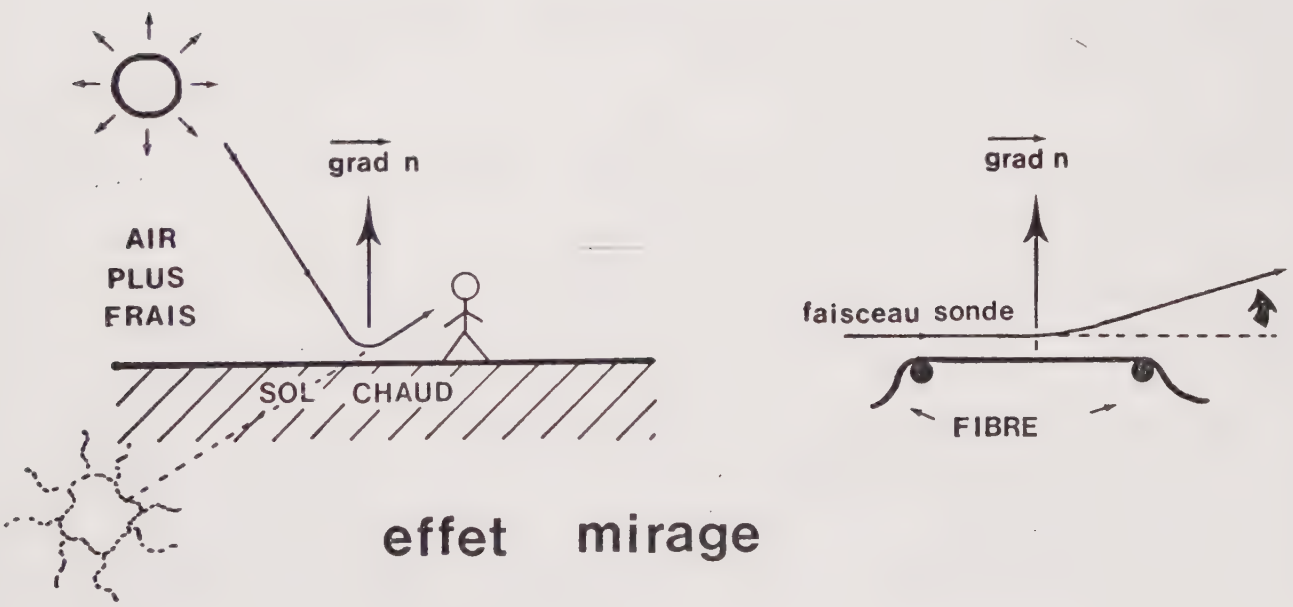
La diffusion peut encore intervenir si de la lumière est absorbée par la membrane du microphone servant à détecter le signal. L'influence négligeable de cette lumière diffusée sera précisée quantitativement lors de la présentation des

résultats expérimentaux du chapître III. Nous présentons maintenant une autre méthode de détection indépendante de la lumière diffusée par nature et basée sur l'effet mirage.

II-4-2 Détection utilisant l'effet mirage.

La fibre optique, ou plus exactement son coeur, chauffée périodiquement à la fréquence ν par absorption de lumière subit des variations de température T_s à sa surface induisant ainsi une répartition de température inhomogène T(r) dans le gaz.

Cette inhomogénéité, caractérisée par un gradient radial de température induit un gradient d'indice qui lui est proportionnel. La méthode de photodéviation (ou "effet mirage") consiste donc à étudier la déviation d'un faisceau sonde (Laser He-Ne le plus fréquemment) par ce gradient d'indice.



effet mirage

II-4-2-1 Expression de la déviation photothermique

Le gradient d'indice existant dans le milieu environnant est de façon évidente :

$$\frac{dn}{dr} = \frac{dn}{dT}(P_0, T_0)\ \frac{dT}{dr}$$

Les variations de température et de pression étant faibles la quantité $\frac{dn}{dT}$ sera supposée constante. Elle peut cependant varier fortement suivant la nature du milieu (gaz, liquide ou solide ; de 10^{-6} à 10^{-4}/°C) (32). L'expression de la répartition de température dans le gaz en ce qui concerne la fibre est :

$$T(r) = \frac{T_s}{Ker(\sigma_g a)}\ Ker(\sigma_g r)$$

Par suite, le gradient d'indice a pour expression :

$$\frac{dn}{dr} = \frac{\sigma_g T_s}{Ker(\sigma_g a)}\ \frac{dn}{dT}\ Ker'(\sigma_g r) \qquad (II.37)$$

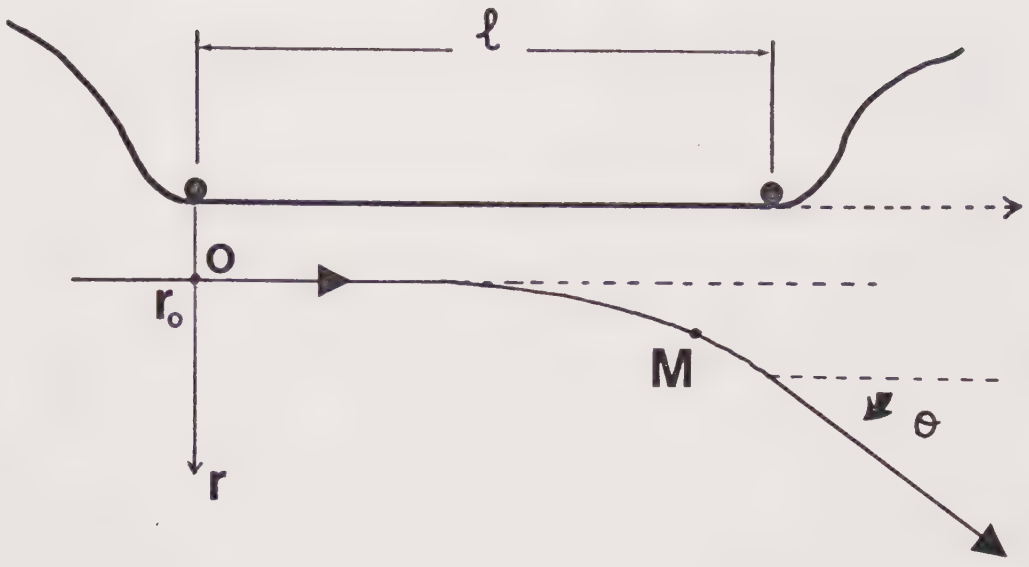
On peut donc à l'aide de l'expression (II-37) évaluer la trajectoire d'un rayon lumineux donnée par l'équation du rayon (33) :

$$\frac{d}{ds}\left(n(M)\ \frac{d\vec{OM}}{ds}\right) = \overrightarrow{grad}\ n \qquad (II.38)$$

avec les notations du schéma ci-dessous et où s désigne l'abscisse curviligne le long du rayon.

Il faut immédiatement préciser l'ordre de grandeur des déviations observées qui sont voisines de 0,3". La longueur d'interaction l'étant de 70 cm, ces déviations représentent des déplacements de 1 µm à la distance z = 1.

../..



Il apparait alors raisonnable de confondre l'abscisse curviligne s avec z.

$$s \simeq z$$

et de supposer que sur la trajectoire du rayon lumineux, à la fois n et $\frac{dn}{dr}$ sont constants et valent respectivement

$$n(r_o) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dn}{dr}\right)_{r=r_o}$$

Compte-tenu de ces expressions et de la relation mathématique

$$\sin\theta = \frac{dr}{ds} \simeq \theta$$

l'équation du rayon (II-38) devient :

$$d(n\theta) = \left(\frac{dn}{dr}\right)_{r_o} dz$$

ce qui entraine par intégration

$$\theta = \theta_o + \frac{\ell}{n}\left(\frac{dn}{dr}\right)_{r_o}$$

Θ_o représente l'angle du rayon avec la fibre dans le plan z = 1 et la quantité $\Theta = \frac{\ell}{n}\left(\frac{dn}{dr}\right)_{r_o}$ est la déviation par rapport à cette direction initiale utilisant l'expression (II-37) du gradient d'indice on est alors conduit à la relation :

$$\Theta(r_o) = \sigma_g T_s \frac{\ell}{n} \frac{dn}{dT} \frac{Ker'(\sigma_g r_o)}{Ker(\sigma_g a)} \qquad (II.39)$$

Une nouvelle fois, cette expression exprime que, pour une géométrie fixée et un gaz donné, le signal est déterminé par la température de surface de la fibre. Ceci permet d'envisager une exploitation des signaux photoacoustique et photothermique identiques.

L'amplitude $|\Theta|$ permettra d'atteindre le coefficient d'absorption β à la suite de l'étalonnage proposé précédemment. Cette technique a le mérite d'être insensible par nature à la lumière diffusée et ses résultats expérimentaux confirment ceux de la méthode photoacoustique (ch. III). L'étude du déphasage φ_Θ entre Θ et la modulation permettra de mesurer χ_f par la technique proposée au paragraphe précédent à condition toutefois d'utiliser un détecteur de déviation ayant une bande passante suffisamment élevée comme une photodiode à quadrans.

II-4-2-2 Variations de la déviation photothermique avec la fréquence de modulation

Les variations de la phase φ_Θ en fonction de la fréquence n'ont par fait l'objet d'une étude particulière. En effet, l'examen des expressions (II-35) de p et (II-39) de montre que les parties complexes des deux signaux ont même forme et donc que leurs phases respectives se comportent de la même façon en fonction de la fréquence.

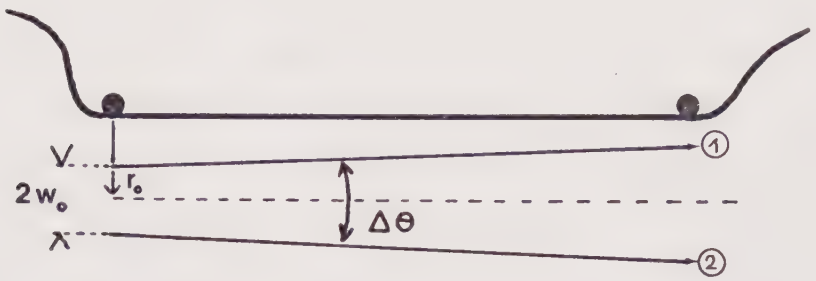
Il apparaît donc avantageux de se placer à basse fréquence (T_s élevée) et près de la fibre (diminuer r_o) pour disposer d'un gradient de température important. Malheureusement, si on peut diminuer la fréquence, on ne peut se rapprocher à volonté de la fibre du fait du diamètre non nul du faisceau sonde.

II-4-2-3 Influence de l'étendue du faisceau sonde.

La relation (II-39) qui exprime la déviation d'un rayon lumineux est suffisante pour étudier les variations du signal photo thermique tant en amplitude qu'en phase, avec la fréquence. Elle risque cependant de devenir insuffisante pour une estimation absolue du signal. Il faudrait en effet, définir la déviation d'un faisceau gaussien (faisceau sonde He-Ne) qui ne peut-être rigoureusement considéré en termes de rayons géométriques. L'étude de ce problème relativement délicat ne sera pas abordée ici car l'étalonnage du système à l'aide d'un fil chauffant permet de s'en dispenser. En effet, dès lors qu'on utilise le même faisceau sonde, lorsque (pour r_o fixé) les deux signaux donnés par la fibre d'une part et le fil d'autre part sont égaux, on peut en conclure que la répartition de température dans le gaz est la même dans les deux cas. Ceci implique alors l'égalité des températures de surface des deux échantillons et l'utilisation de la relation d'étalonnage II-35 permet de relier le coefficient β à l'intensité qui parcourt le fil. Les écarts au modèle du rayon utilisé pour établir la relation (II-39) peuvent cependant être simplement estimés en termes d'optique géométrique. Supposons que le faisceau sonde ait un diamètre 2wo dans le plan z = 0 et une ouverture angulaire $\Delta\theta$ (les ordres de grandeur étant $\Delta\theta \simeq 3'$ et 2wo = 1 mm) et que son axe de symétrie soit parallèle à la fibre, l'influence d'un défaut de parallèlisme étant envisagé plus loin.

../..

Il apparait de façon évidente que les deux rayons extrêmes 1 et 2 ne sont pas déviés de la même quantité. Le rayon 1 qui "voit" un gradient plus important que le rayon 2 sera dévié d'un angle plus grand que le rayon 2. L'ouverture



du faisceau est donc à priori diminuée et la répartition de lumière n'a plus la symétrie de révolution. La définition de la déviation du faisceau n'est plus triviale.

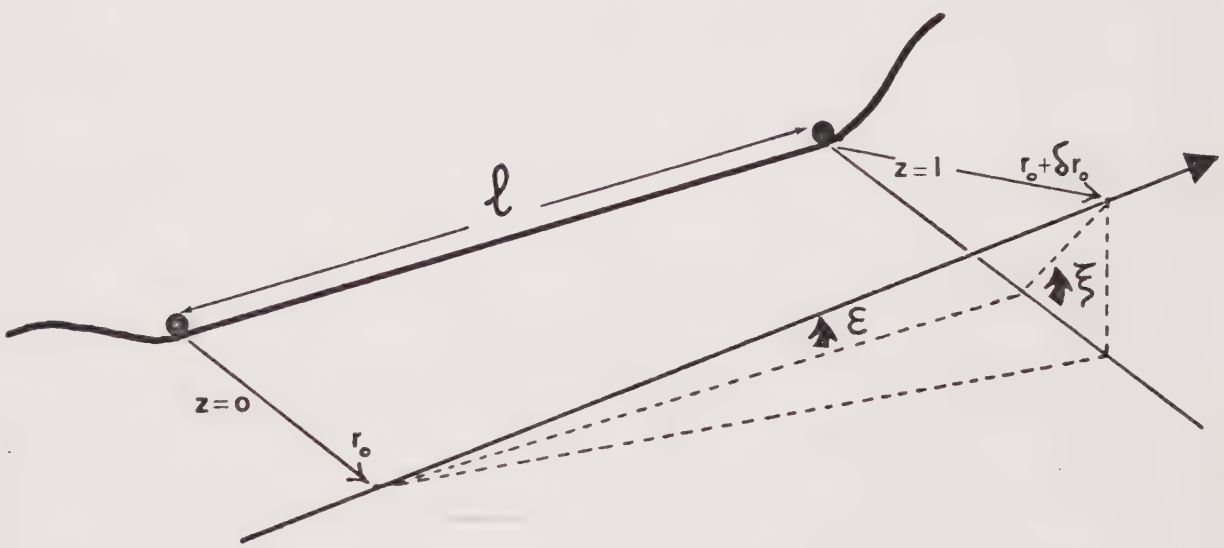
Cependant, dans le cas de la fibre, les déviations observées sont très faibles (environ 0, 3") et la forme du faisceau n'est que peu perturbée.

Considérons un rayon faisant avec la fibre un angle dans le plan z = 0 ; Θ_o vaut au plus $\frac{\Delta\theta}{2}$ soit 1,5'. Pour un angle faible comme celui-ci, on peut encore considérer le gradient d'indice constant sur la trajectoire. Le calcul qui mène à l'expression (II-39) reste donc valable et l'angle du rayon considéré avec la fibre dans le plan z = 1 est $\Theta_o + \mathcal{M}(r)$. Par suite, la variation d'ouverture angulaire est donc

$\delta(\Delta\Theta) = \mathcal{M}(r_o - w_o) - \mathcal{M}(r_o + w_o)$. Bien que

(pour r_o = 2mm et 2wo = 1mm) $\Theta(r_o - w_o)$ puisse être 3,5 fois plus grand que $\Theta(r_o + w_o)$, $\delta(\Delta\Theta)$ reste inférieur à la seconde d'arc et peut donc être négligé devant $\Delta\Theta$. Ceci appuie les affirmations précédentes, le faisceau sonde n'est que peu modifié et le calcul suivant les lois de l'optique géométrique donne une bonne approximation de la déviation.

Dans l'hypothèse ou on se limite au modèle utilisant un seul rayon, la longueur d'interaction 1 étant plus grande que dans les expériences habituelles de photodéflection (20), il faut veiller au réglage du parallèlisme initial du rayon et de la fibre. Dans ce cas où il n'en est pas ainsi, le rayon est repéré par les angles ε et ξ du schéma suivant.



En l'absence du gradient d'indice, au bout de la distance 1, la distance du rayon à la fibre est $r_o + \delta r_o$ avec

$$(r_o+\delta r_o)^2 = (r_o + l\varepsilon\cos\xi)^2 + (\varepsilon l \sin\xi)^2$$

soit

$$\delta r_o = \varepsilon l \cos\xi + \frac{(\varepsilon l)^2}{2 r_o} \qquad (II.40)$$

../..

Cet écart est maximum quand $\xi = o$ c'est-à-dire quand le rayon et la fibre sont dans le même plan.

On choisira alors sur ε un critère de réglage de sorte que cet angle entraine un défaut de parallèlisme δr_o inférieur au diamètre 2wo du faisceau. Envisageant les deux cas extrêmes $\xi = o$ et $\xi = \frac{\pi}{2}$, les limites sont

$$\varepsilon^1_{MAX} = \frac{2w_o}{\ell} \quad (\xi = o) \quad \text{et} \quad \varepsilon^2_{MAX} = \frac{2\sqrt{w_o r_o}}{\ell} \quad (\xi = \tfrac{\pi}{2})$$

Pour r_o = 2mm, distance à laquelle le gradient d'indice est encore intense, ces deux limites sont égales à 5' ce qui représente un défaut δr_o de 1mm. Expérimentalement ce réglage peut-être respecté sans majeure difficulté. Rappelons pour terminer que dès l'instant qu'on réalise la même géométrie pour la fibre et le fil, la méthode de l'étalonnage permet d'éviter ces problèmes.

II-5 Conclusion

Il ressort de ce qui précède que ces deux méthodes des caractères différents mais qui ont un rôle complémentaire. Tout d'abord se pose le problème de la symétrie du dispositif. La symétrie de révolution est parfaitement conservée dans le montage utilisant la cellule et dans le cas, la substitution du fil à la fibre en vue de l'étalonnage est facile. Par contre, utilisant l'effet mirage, il faut prendre soin de placer le fil à la même distance que la fibre, du faisceau et le réglage du parallèlisme, du fait de la longueur d'interaction, est rendu de première importance. Ces difficultés, en comparaison de la méthode photoacoustique, viennent du fait que la symétrie du faisceau sonde et celle de la fibre (ou du fil) ne sont pas identiques.

Cet inconvénient ne doit pas masquer l'avantage essentiel de la méthode photothermique (19) qui est l'indépendance envers la lumière diffusée par l'échantillon. Elle permettra de confirmer la faible influence de la lumière diffusée dans la cellule qui pourrait devenir prépondérante par exemple dans le domaine U.V.

De plus, cette méthode parait tout à fait adaptée à la caractérisation tant du point de vue de l'absorption que des paramètres thermiques des guides optiques plans. En effet, l'avantage du guidage de la lumière dans de faibles épaisseurs (quelques longueurs d'onde optique) permet d'obtenir des densités d'énergie importantes et d'envisager l'utilisation de méthodes photothermiques comme dans le cas des fibres mais cette fois avec une géométrie ne faisant intervenir en première approximation qu'une dimension.

Enfin, sont apparus deux domaines de fréquences de modulation de la lumière se prêtant à une exploitation expérimentale.

D'une part, le domaine des basses fréquences, caractérisé par une longueur de diffusion thermique dans la fibre grande devant son rayon, permet d'effectuer une mesure du coefficient d'absorption β de la fibre.

Celà est mené à bien en effectuant un étalonnage à l'aide d'un fil chauffé par effet Joule dû au passage d'un courant d'intensité I. L'égalité des signaux se traduisant par l'égalité des températures de surface du fil et de la fibre, ce qui conduit à la relation d'étalonnage $\beta\phi_0 (I^2)$ (II-35).

D'autre part, pour des fréquences ν élevées (longueur

de diffusion thermique petite devant le diamètre de la fibre cette fois), l'étude du déphasage φ entre le signal et la modulation montre que $\varphi(\sqrt{\nu})$ est une droite dont la pente est étroitement reliée à la diffusivité thermique χ_f de la fibre autorisant par là même une mesure de ce paramètre.

CHAPITRE III

DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX ET MESURES

Dans ce chapître nous présentons la mise en oeuvre expérimentale des deux techniques développées dans le chapître précédent : photoacoustique, utilisant une cellule et effet mirage. Le coefficient d'absorption β d'une fibre optique a été mesuré pour la longueur d'onde 514,5 nm par les deux méthodes. Enfin, une mesure de la diffusivité thermique χ_f a été réalisée par effet photoacoustique.

III-1 Expérience utilisant une cellule photoacoustique

III-1-1 - Dispositif expérimental

Un schéma de principe du dispositif expérimental est donné sur la figure III-1 ; ses différents éléments sont précisés dans la suite de ce paragraphe.

III-1-1-1 - La source de lumière

Dans le domaine visible, la contribution de la diffusion Rayleigh aux pertes est importante ; elle varie comme λ^{-4}. Nous avons donc choisi la longueur d'onde λ = 514,5 nm pour tester la méthode et plus particulièrement pour étudier l'influence de la lumière diffusée sur le signal photoacoustique. De plus, le couplage de la lumière dans la fibre nécessitant une source intense, nous avons utilisé un laser à argon ionisé. Cette source permet d'utiliser des flux importants nécessaires pour la mesure de la diffusivité χ_f . En effet, nous avons montré au chapitre II que de hautes fréquences de modulation doivent être atteintes : de 400 Hz à 1 kHz.

../..

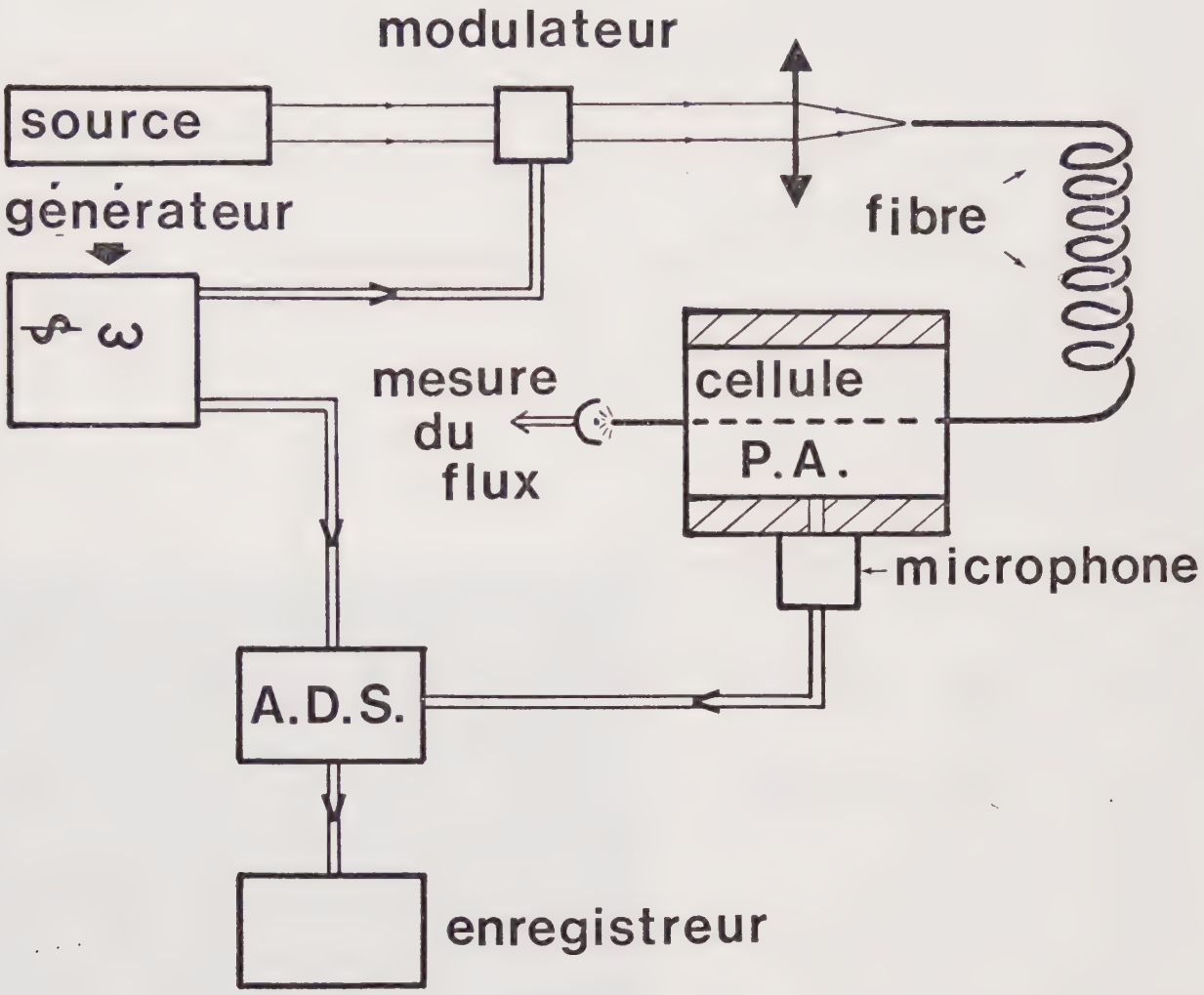


Figure III-1 : Schéma du dispositif expérimental

Or quand la fréquence augmente, l'amplitude du signal diminue et en conséquence, des flux importants doivent être injectés dans la fibre pour obtenir un signal détectable (ϕ_o de l'ordre de 1 W). Notons que l'utilisation d'une source accordable permettrait de se placer sur un pic d'absorption et ainsi d'augmenter le signal de pression.

III-1-1-2- Le modulateur

La modulation de la lumière en amplitude est assurée par un modulateur acoustooptique qui présente l'avantage, par rapport à un modulateur mécanique, de ne créer aucun bruit à la

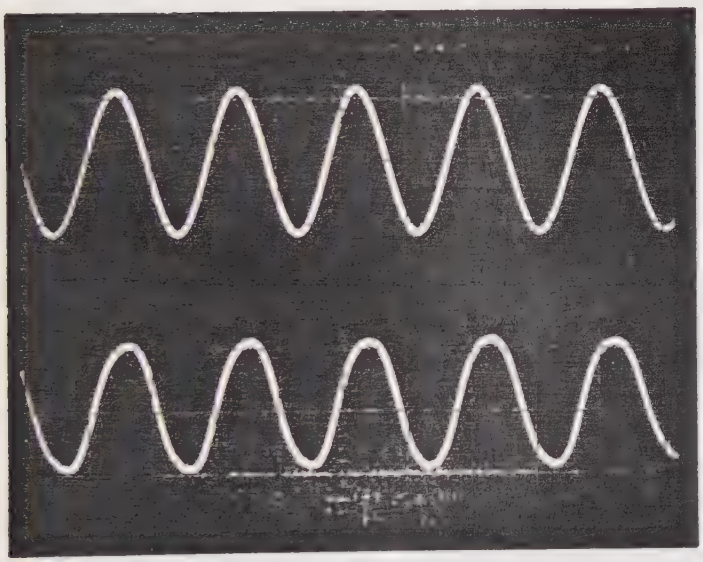


Figure III- 2

fréquence de modulation et cohérent avec le signal photoacoustique. Son régime de fonctionnement est celui de Bragg. Dans ce cas, le réseau de diffraction engendré par l'onde ultrasonore dans le cristal du modulateur se comporte comme un réseau de phase épais. Le réglage de l'angle de Bragg est effectué en observant les ordres de diffraction et en cherchant à obtenir uniquement les ordres 0 et 1 ou 0 et -1 (deux positions symétriques). L'optimisation du taux de modulation s'obtient en observant le signal délivré par une photodiode sur l'écran d'un oscilloscope (figure III-2). Les taux de modulation ainsi obtenus sont de l'ordre de 90 % à 100 %.

III-1-1-3 - La fibre optique

Les mesures ont été effectuées sur une fibre multimodes (pour λ = 514,5 nm) ; environ 10 m de fibres ont été utilisés. Les caractéristiques de cette fibre sont les suivantes :

- . diamètre du coeur 65 µm
- . diamètre de la fibre 125 µm
- . ouverture numérique : 0,2
- . atténuation donnée par le constructeur pour la longueur d'onde utilisée : 20 dB/km (environ 5.10^{-5} cm^{-1})

Pour augmenter la résistance mécanique des fibres, celles-ci sont revêtues de gaines synthétiques. Elles n'ont que peu d'importance pour la mesure du coefficient d'absorption β. En effet, opérant dans ce cas à basse fréquence, la répartition de température est uniforme à l'intérieur de la fibre et la relation d'étalonnage (II-35) n'est pas modifiée. Par contre, pour la mesure de la diffusivité thermique α_f, il faut décaper soigneusement la gaine mécanique (résine époxy, silicones...) ; celle-ci aurait pour effet, par son inertie thermique, de créer un déphasage supplémentaire dépendant de la fréquence, entre le signal photoacoustique et le signal de modulation ce qui entrainerait pour la diffusivité une valeur erronée.

../..

Cette précaution étant prise, la lumière est couplée dans la fibre à l'aide d'un objectif de microscope d'ouverture numérique adaptée.

III-1-1-4 - La cellule photoacoustique (figure III-3 et III-4)

Elle est constituée par un bloc de duralumin évidé intérieurement suivant un cylindre de rayon R = 5 mm. Les

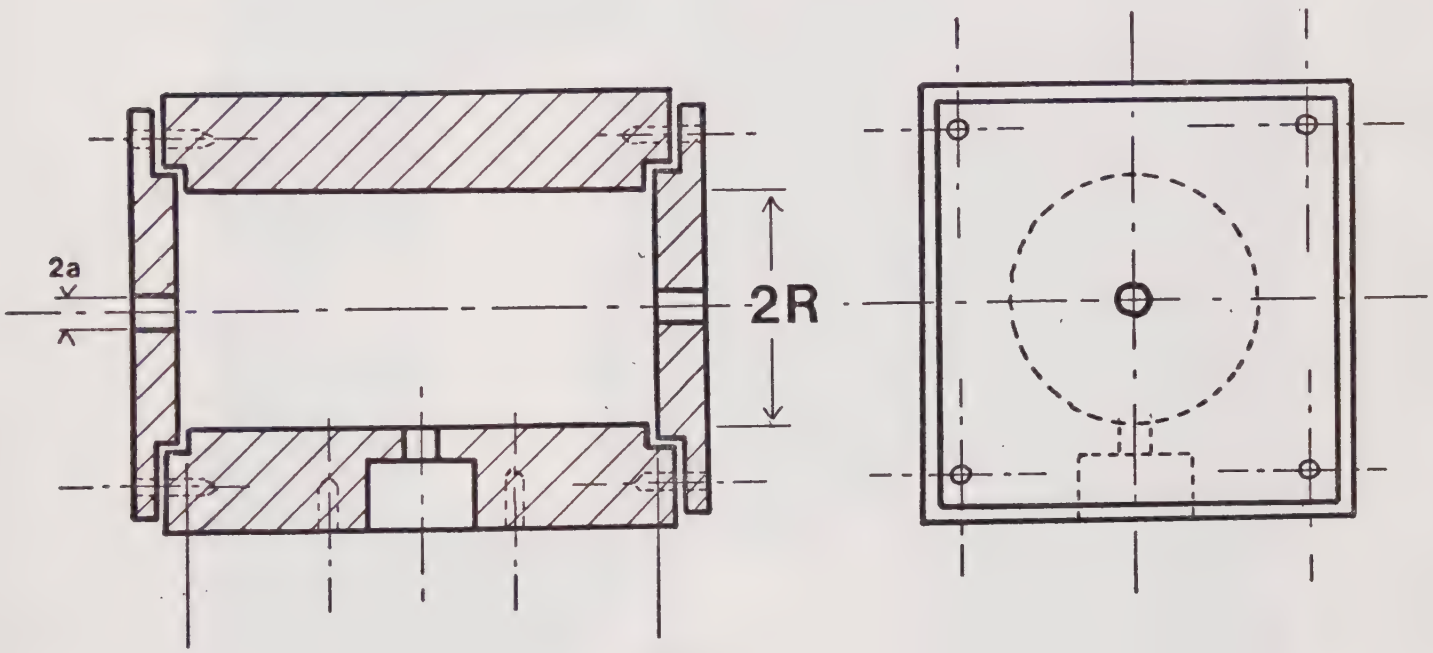
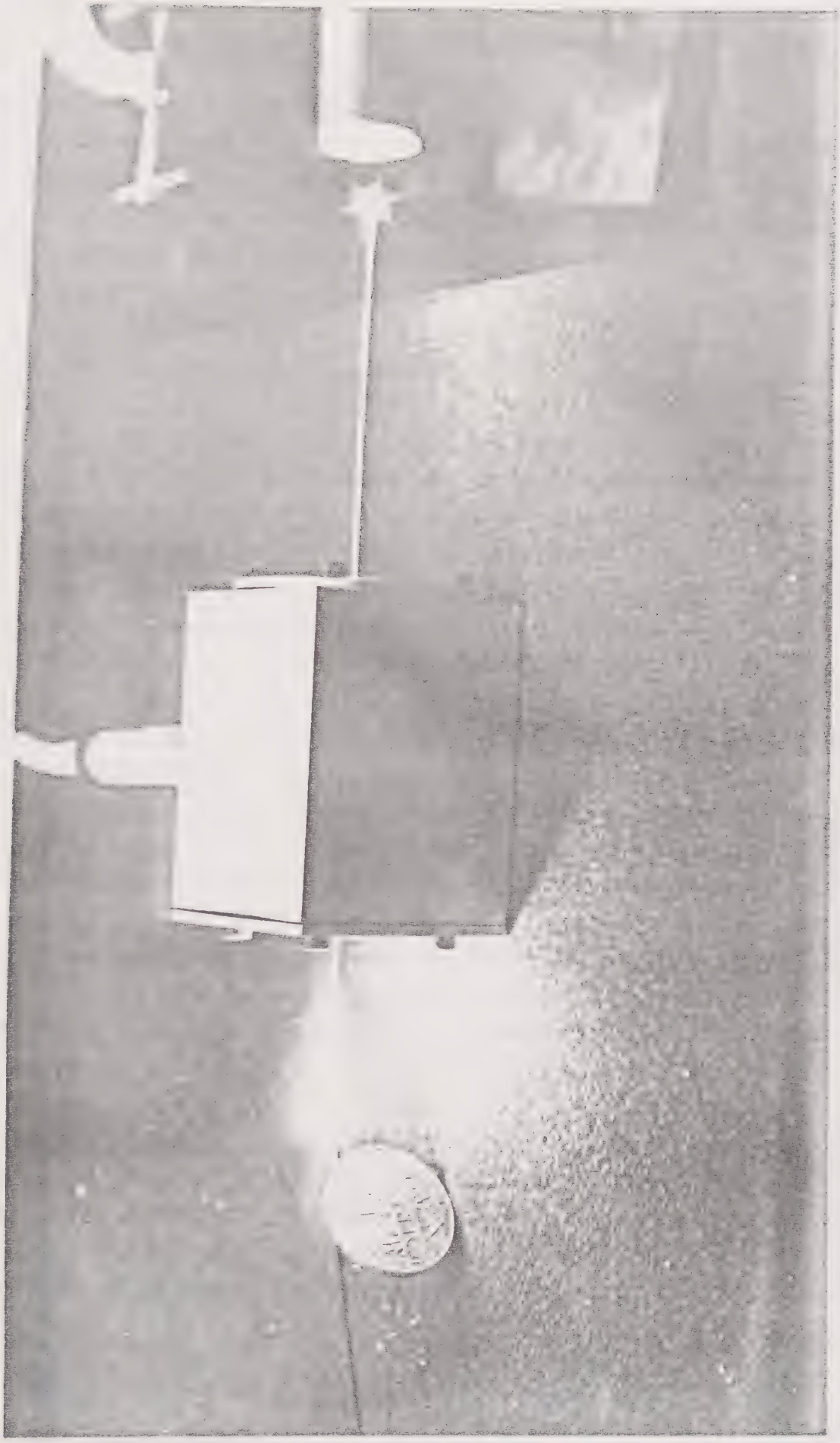


figure III.3

extrèmités de la cavité sont fermées par des disques de duralumin munis de joints d'étanchéîté et perçés en leur centre d'un trou de 200 µm de diamètre. A ce niveau, l'étanchéîté est assurée par de la colle ou mieux de la graisse à vide ; en séchant la colle risque de créer des contraintes axiales qui



entrainent un fléchissement de la fibre. La longueur de la cellule utilisée est 5 cm. Une cavité est prévue pour placer le microphone en communication avec la cavité cylindrique par un petit trou de diamètre 2 mm. Le couplage de ces deux cavités peut donner lieu à des résonances de Helmholtz (34) qui ont été effectivement observées.

III-1-1-5 - Détection du signal

Les variations de pression autour de la pression ambiante (P_o = 1 atm) sont détectées par un microphone capacitif Brüel et Kjaer type 4165 muni d'un préamplificateur type 2619.Sa sensibilité est de 50 mV/Pa. La tension délivrée est amplifiée et ensuite traitée par un amplificateur à démodulation synchrone (A.D.S.) à deux voies. Cette opération permet d'extraire le signal de fréquence ν cohérent avec la modulation, ou à la fréquence 2ν . Cette option est particulièrement utile pour les mesures sur le fil chauffant. L'A.D.S. peut fonctionner suivant deux modes différents : Dans le premier mode, une voie fournit la composante à la fréquence ν en phase avec la référence, l'autre voie la composante en quadrature ; dans le second mode, l'appareil délivre directement l'amplitude et le déphasage du signal par rapport à la référence de modulation. Cette seconde utilisation est bien adaptée à notre étude. Pour chaque voie de l'A.D.S., il existe une sortie analogique qui permet d'enregistrer le signal. Plusieurs enregistrements sont présentés dans la suite de ce chapître.

Enfin, le flux couplé à l'intérieur de la fibre est détecté par une photodiode à l'extrémité de celle-ci. Une division du signal photoacoustique par le signal électrique correspondant au flux couplé permet de s'affranchir des fluctuations éventuelles de la puissance de la source.

III-1-2 Mesure du coefficient d'absorption β.

III-1-2-1 Etude de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence

Rappelons que pour la simplicité de la relation d'étalonnage (II-35), la mesure de β doit se faire à basse fréquence. Aussi, l'amplitude du signal n'a été étudiée que dans le domaine 1 Hz - 100 Hz, et ce afin de vérifier l'approche théorique développée au chapître II. Les résultats sont présentés sur la figure (III-5) dans le cas de la fibre.

Il apparait que l'amplitude du signal décroit effectivement en fonction de la fréquence de modulation comme $\nu^{-\alpha_o}$ dans le domaine 10 Hz - 100 Hz avec $\alpha_o \simeq 1,7$. Ce comportement confirme les résultats théoriques du chapître II (§ II). Cependant, une évaluation de α_o par le calcul nécessite la connaissance de la diffusivité χ_f de la fibre ainsi que de son diamètre extérieur a. En prenant pour χ_f la valeur donnée par la mesure présentée plus loin, on obtient $\alpha_o = 1,75$. Notons toutefois deux choses :

- la valeur de χ_f est entachée d'une incertitude de mesure qui peut entrainer des variations de α_o calculé théoriquement de l'ordre de 0,05.

- d'autre part, la mesure de χ_f et l'enregistrement de la figure (III-5) n'ont pas été effectués au même endroit sur la fibre et par conséquent des variations de diamètre ou de diffusivité peuvent expliquer l'écart entre la valeur calculée et la valeur mesurée de α_o.

Il faut encore remarquer sur la figure (III-5) que pour des fréquences inférieures à 10 Hz, les points expérimentaux ne

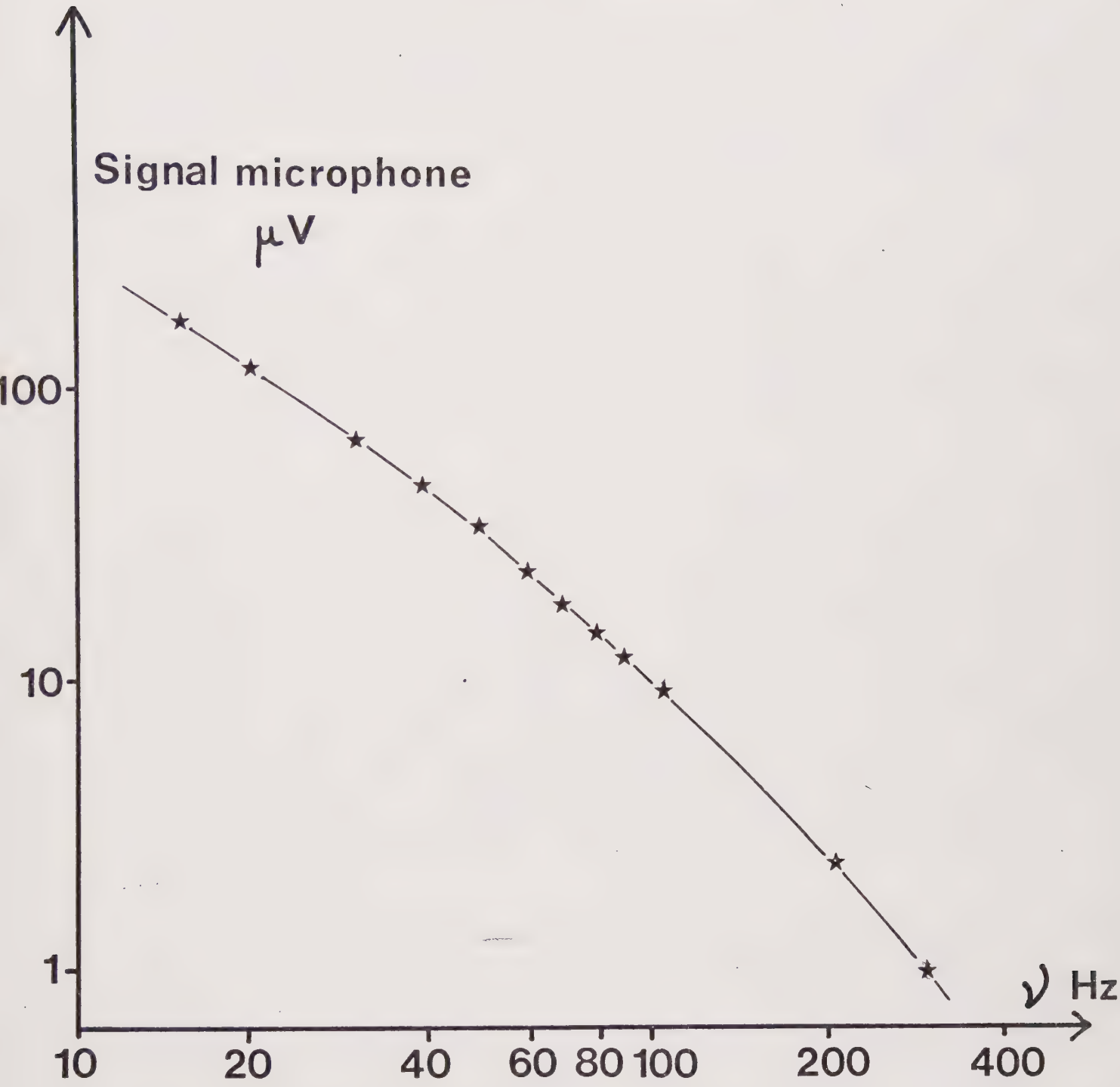


Figure III-5 : Variations de l'amplitude du signal avec la fréquence

sont plus sur la droite de pente α_0. Celà traduit l'influence de la paroi de la cellule quand la longueur de diffusion thermique dans le gaz aumente ; la contribution de l'onde thermique réfléchie est alors non négligeable (§ II-3) ; à celà s'ajoute une diminution de la sensibilité du microphone à basse fréquence.

Une étude du signal produit par le fil chauffant a aussi été effectuée expérimentalement. Le fil utilisé ayant une résistance de 70 Ω , tout générateur de fonctions est apte à délivrer une tension efficace nécessaire pour produire un courant de quelques milliampères qui produisent un signal de pression détectable à l'aide du microphone.

L'amplificateur à démodulation synchrone ne donne aucun signal à la fréquence ν du courant, seul un signal à la fréquence 2ν existe et les enregistrements des figures III-6 et III-8 montrent que l'amplitude du signal est proportionnelle au carré de l'intensité du courant I^2. Enfin, le microphone a été placé à côté du fil chauffant mais à l'air libre en l'absence de cellule ; aucun signal cohérent n'a été détecté. Cette vérification écarte l'hypothèse d'une dissipation d'énergie par courants de Foucault dans la membrane et confirme que le signal délivré par le microphone est bien dû à des variations de pression dans la cellule.

Les variations de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence, dans le cas du fil, sont données sur la figure (III-7). Le signal décroit comme $\omega^{-\alpha'_0}$ mais il apparait une résonance à la fréquence acoustique 190 Hz (fréquence du courant 95 Hz). Une explication possible est que le fil résonne comme une corde vibrante. La fréquence observée correspond à une tension mécanique du fil de 0,04 $\mathcal{N}$. Il est à noter que des effets semblables ("effet tambour") ont déjà été observés au cours d'expériences de photoacoustique (24). Une augmentation de la

../..

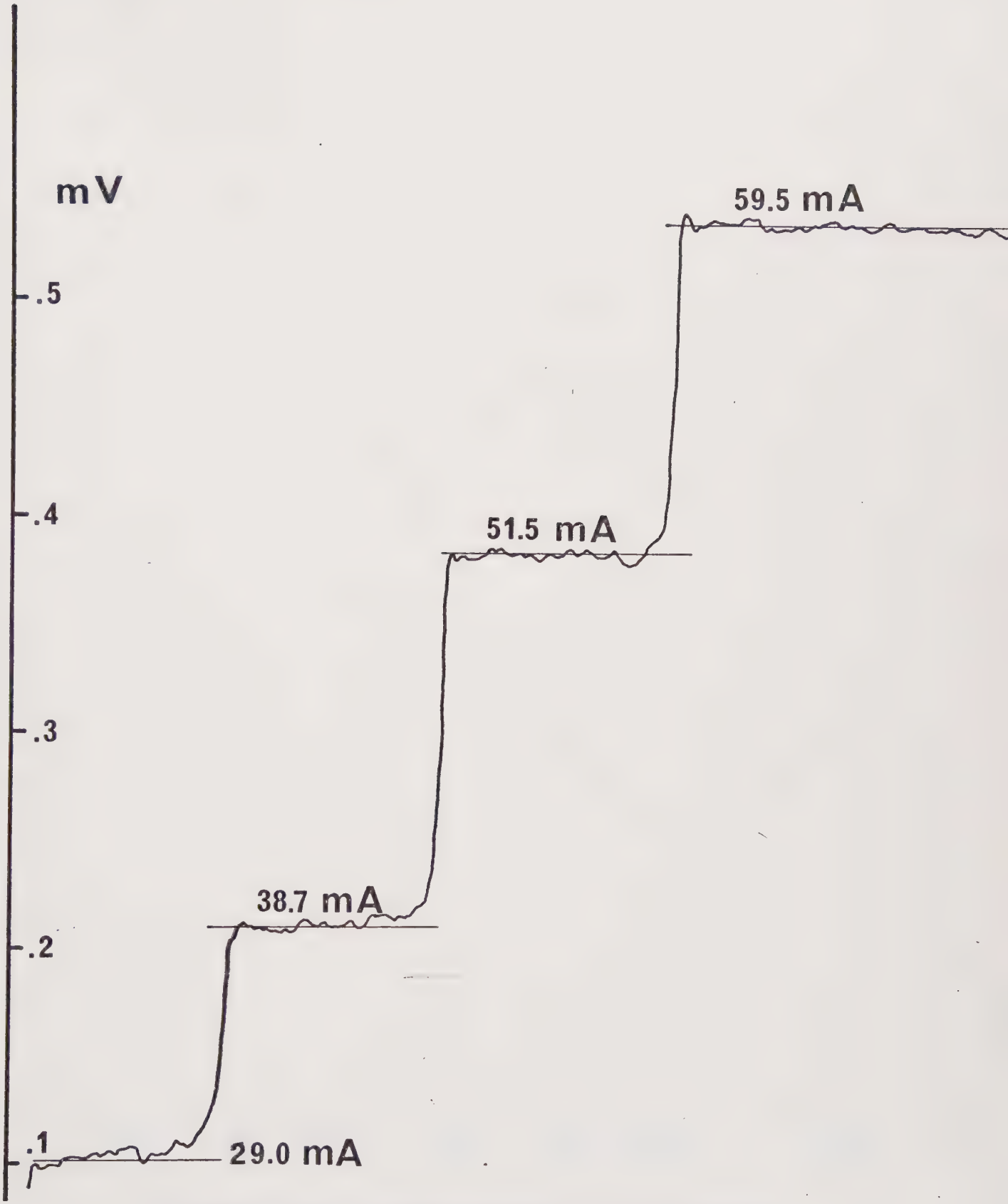


Figure III-6 : enregistrements de la tension microphonique dans le cas du fil.

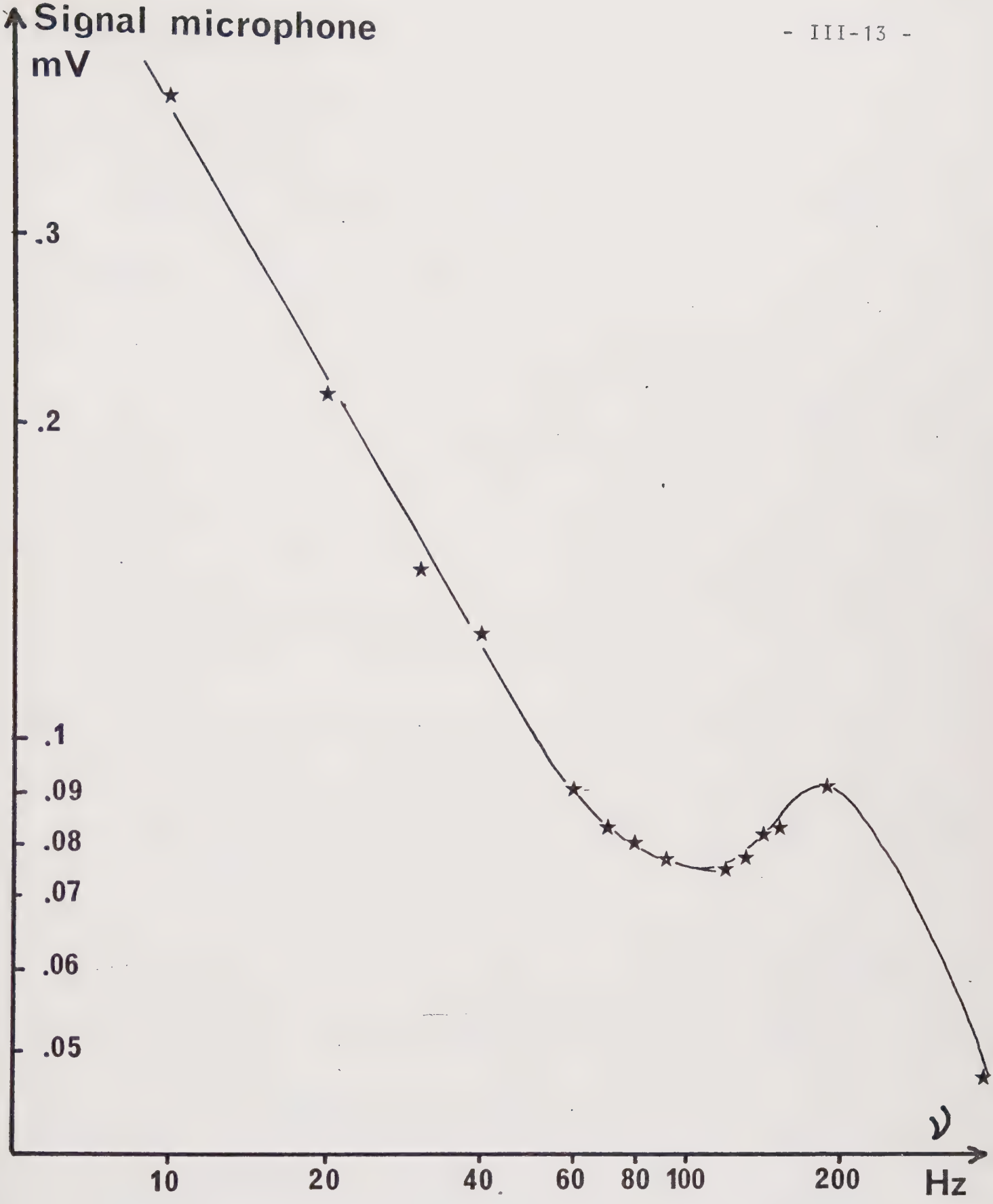


Figure III-7 : Variations de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence (fil)

../..

tension mécanique du fil permet, si besoin est, de repousser cette résonance vers les hautes fréquences.

III-1-2-2 Courbe d'étalonnage

Toutes les mesures ont été effectuées à la fréquence ν = 30 Hz, fréquence qui respecte les conditions de validité de la relation d'étalonnage (II-35) $\beta\phi_0 \propto I^2$ (Essentiellement, la longueur de diffusion thermique dans le gaz doit être petite devant le rayon de la cellule et dans la fibre, grande devant son diamètre). Le courant qui parcourt le fil est donc à la fréquence $\nu/2$ = 15 Hz. Les signaux enregistrés sont donnés sur la figure (III-6) et la droite d'étalonnage donnant le signal microphonique en fonction de I^2 est représentée sur la figure (III-8). Sa pente est : 1,9 10^5 $\mu V/A^2$

III-1-2-3 Influence de la lumière diffusée

Expérimentalement, l'influence de la lumière diffusée intervient sous deux aspects. D'une part, cette lumière peut-être directement absorbée par la membrane du microphone et donner lieu à un signal cohérent avec le signal de modulation.

D'autre part, la cellule étant métallique, donc opaque dans le domaine spectral utilisé, la lumière diffusée peut-être absorbée par la paroi et par là-même engendrer une surpression modulée dans le gaz. Ces deux aspects ont été étudiés.

a) membrane du microphone

Cet effet a été étudié en envoyant directement de la lumière modulée sur la membrane du microphone. Il apparait alors un signal à la même fréquence en sortie du microphone.

La géométrie de la cellule est telle qu'environ 0,1 % de la lumière diffusée peut atteindre directement le microphone.

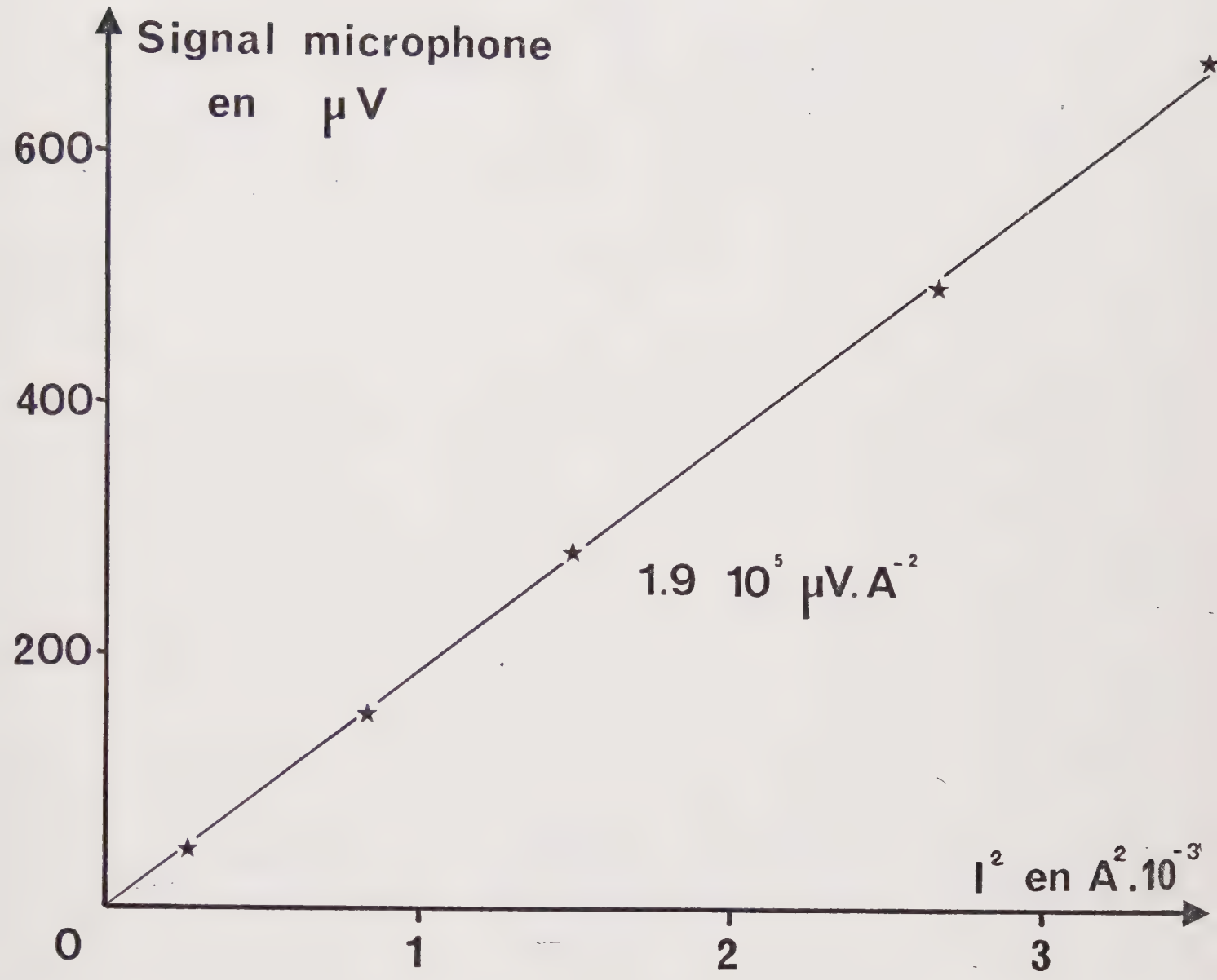


Figure III-8 : Proportionnalité du signal microphonique avec I^2

../..

Supposant alors, de façon excessive, que toutes les pertes de la fibre, soit 20 dB/km, sont dues à la diffusion, on obtient une contribution au signal photoacoustique de 0,02 nV pour 1 mW couplé dans la fibre. Lors des mesures de β , les tensions mesurées en sortie du microphone étant de l'ordre de 100 nV pour 1m W, l'influence de la lumière diffusée atteignant le microphone apparaît comme négligeable.

b - Paroi de la cellule

L'effet de la lumière diffusée sur la paroi a été étudié en faisant rayonner l'extrèmité d'une fibre optique dans la cellule photoacoustique. Ainsi toute la lumière apportée à l'intérieur de la cellule y est absorbée. Il apparaît alors un signal cohérent qui donne une tension équivalente 1 nV pour un flux ϕ_o = 1 mW couplé dans la fibre ; en admettant encore que la totalité des pertes se fait par diffusion, l'influence de cet effet est donc d'environ 1 % sur les signaux enregistrés qui fournissent les résultats que nous donnons maintenant.

III-1-2-4 - Résultats de la mesure du coefficient d'absorption

La mesure du coefficient d'absorption β a été faite pour deux flux ϕ_o différents ; les résultats obtenus sont les suivants pour une fréquence de modulation ν = 30 Hz.

ϕ_o	β	β
mW	$10^{-5} cm^{-1}$	dB/km
240	2,15	9,3
150	2,12	9,2

Rappelons que dans un premier temps la mesure porte sur $\beta\phi_o$ à la suite de l'étalonnage avec le fil chauffant. La relation (II-35) donne $\beta\phi_o$ en fonction de la valeur efficace

../..

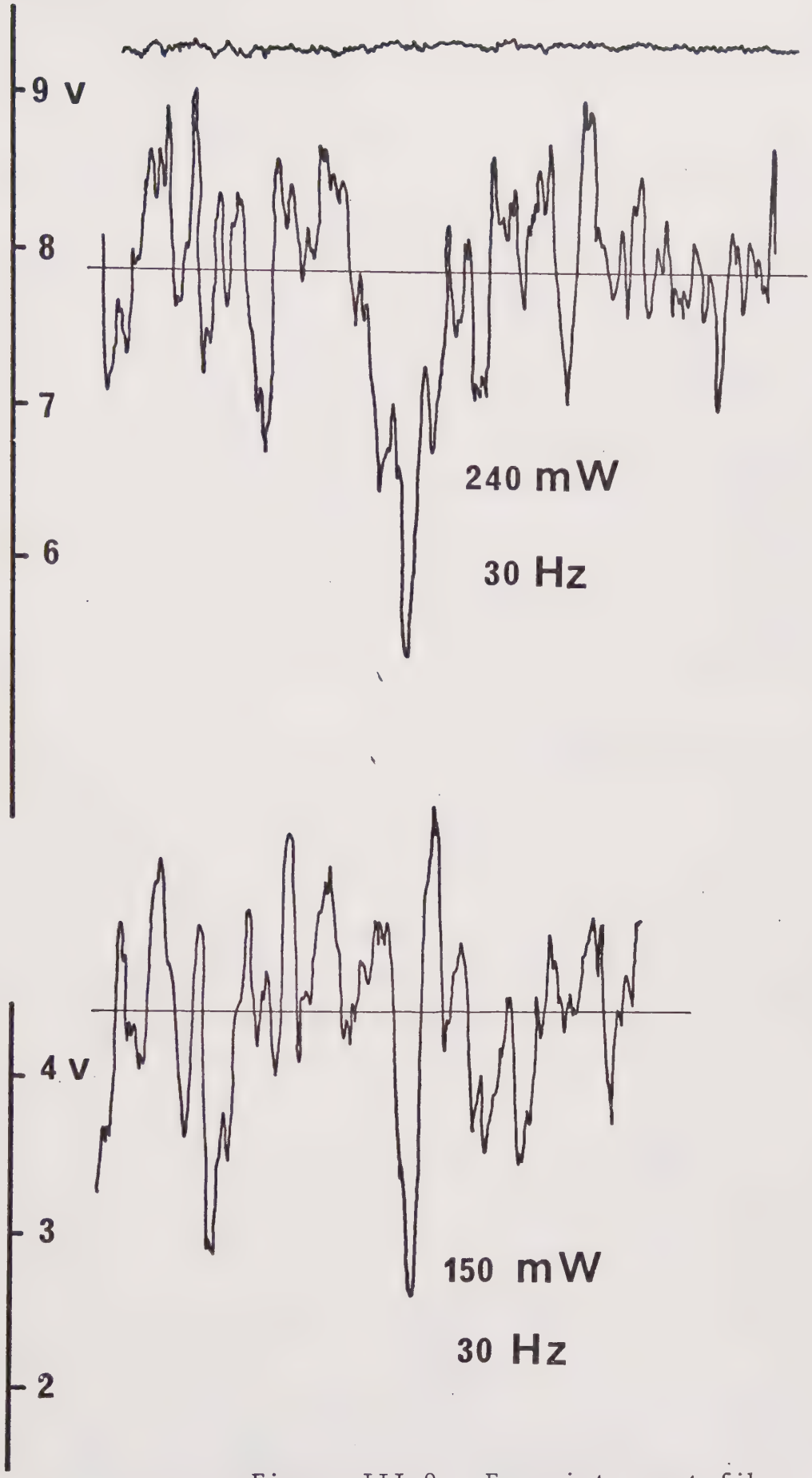


Figure III-9 : Enregistrement fibre

du courant I :

$$\beta\phi_o = \frac{1}{\gamma_e} \frac{\rho_f C_f}{\rho_F C_F} \frac{a^2}{a_F^2} I^2$$

Le rayon de la fibre et le rayon du fil ont été mesurés au microscope : a = 64,0 ± 0,5 µm et a_F = 86,5 ± 0,5 µm avec des précisions relatives de 0,8 % et 0,6 %. La relation d'étalonnage fait aussi intervenir les capacités calorifiques par unité de volume pour la fibre et le fil dont les valeurs ont ici été prises dans la littérature ; leur précision est de 2 à 3 %. Des valeurs plus justes nécessiteraient des mesures calorimétriques. La conductivité γ_e du fil est mesurée en déterminant pour une longueur donnée, sa section et sa résistance : $\gamma_e = 2{,}0\ 10^6 \pm 0{,}04\ 10^6\ (\Omega.m)^{-1}$.

On obtient alors numériquement :

$$\beta\phi_o = 5.3\ I^2$$

avec ϕ_o en $W.m^{-1}$ et I^2 en A^2.

Enfin, la précision sur I^2 est déterminée par les fluctuations du signal microphonique qu'on peut observer sur les enregistrements de la figure (III-9). Les précisions obtenues sont alors données ci-dessous.

ϕ_o mW	$\beta\phi_o$ $mW.m^{-1}$	
240	0.52	0.06
150	0.32	0;03

soit $\frac{\Delta(\beta\phi_o)}{\beta\phi_o} = 11\ \%$

Il est donc clair que la mesure du coefficient β est lié à des mesures de flux. Celles-ci ont été effectuées avec une cellule dont la précision est d'environ 4 %.

../..

On peut donc donner les résultats suivants pour la mesure de β .

β = 9,3 ± 1,5 dB/km pour ϕ_o = 240 mW.

et

β = 9,2 ± 1,5 dB/km pour ϕ_o = 150 mW.

L'influence de la lumière diffusée étant de l'ordre de 1 % et l'atténuation totale de la fibre étant 20 dB/km, on peut en conclure qu'environ la moitié des pertes est due à l'absorption pour cette fibre à 514,5 nm.

III-2-5 - Bruits et limitations

Au cours de toutes les mesures effectuées, le niveau sonore, quoique faible a été la principale source de bruit. Bien que l'utilisation d'un modulateur acoustooptique ait permis d'éviter un bruit cohérent avec le signal photoacoustique, il reste les bruits aléatoires d'un bâtiment que seule une isolation acoustique, délicate aux basses fréquences permettrait de réduire.

A celà, il faut ajouter les bruits électriques des différents éléments de la chaîne de détection :

- l'ensemble microphone - préamplificateur
- l'amplificateur à bande passante ajustable
- l'amplificateur à démodulation synchrone (A.D.S.)

Les mesures ont été effectuées à 30 Hz. A cette fréquence le microphone et son préamplificateur ont une tension de bruit de 7 µV. L'utilisation des figures de bruit pour les deux autres éléments, amplificateur et A.D.S. donne respectivement des bruits électriques de 4,4 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$ et 8,4 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$. La bande

passante $\Delta\nu$ étant déterminée par la constante de temps T utilisée sur l'A.D.S. (typiquement T = 3s soit $\Delta\nu = 1/4T = 8.3\ 10^{-2}$ Hz) on obtient respectivement 1.3 nV et 2.4 nV. Le bruit électrique est donc imposé par le microphone et son préamplificateur. Dans notre cas le rapport des largeurs spectrales du bruit et de l'A.D.S. est tel que le rapport signal à bruit est augmenté de 57 dB. Le seuil de détection imposé par le bruit électrique est donc 10 nV soit, en terme de produit $\beta\phi_o$ 1dB/km.mW. Le seuil de détection est en fait limité par le bruit acoustique et sa mesure a donné 10 dB/km.mW.

Il existe enfin un bruit ultime inhérent à l'utilisation d'un microphone. Les chocs aléatoires des molécules de gaz, le mouvement Brownien, induisent des fluctuations de pression sur la membrane du détecteur. Cette source de bruit a été analysée (35) mais elle reste faible devant les variations de pression enregistrées lors des mesures.

III-1-3 - Mesure de la diffusivité thermique (38)

Comme nous l'avons précisé au chapître II, cette mesure concerne l'étude du déphasage du signal photoacoustique par rapport à la modulation en fonction de la fréquence, dans un domaine où la longueur de diffusion thermique est inférieure à l'épaisseur de la gaine optique. Pratiquement, les mesures sont réalisées pour $\nu > 400$ Hz. Ce principe étant posé, il faut éliminer ou corriger tout déphasage dépendant de ν et n'étant pas dû à l'inertie thermique de la gaine. Quoique les éléments du montage soient les mêmes que précédemment, ils seront utilisés avec une bande passante large pour éviter l'inconvénient précédent. Malgré cette précaution, l'amplificateur introduit des déphasages variables avec ν qui ont été enregistrés de façon à effectuer une correction lors de la mesure de χ. Enfin, la fibre doit être soigneusement dégagée de sa protection mécanique qui introduirait un déphasage au

même titre que la gaine optique.

Sur la figure III-10-a sont représentés les enregistrements de la phase et de l'amplitude du signal. L'étude de ces résultats en fonction de la fréquence montre la présence d'une résonance autour de 1,5 kHz (Fig. III-10-b). Une modification de la position du microphone dans son logement a montré un déplacement de cette fréquence de résonance. Celà tend à prouver qu'il s'agit d'un effet de résonnateur de Helmholtz dû au couplage entre la cellule et la cavité du microphone.

En utilisant la relation donnant la fréquence de résonance (34) :

$$2\pi\nu = \sqrt{\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right) \frac{s}{L + \frac{1}{2}\sqrt{\pi s}}}$$

où V_1 et V_2 sont les volumes respectifs des cavités couplées, L et s sont respectivement la longueur et la section du tuyau de couplage, on trouve :

1560 Hz.

Ce qui confirme l'hypothèse formulée ci-dessus. En conséquence, le domaine d'étude pour mesurer χ_f sera limité à 400 Hz - 1 kHz. La figure (III-10b) montre que le déphasage φ, dans ce domaine est une fonction linéaire de la racine carrée de la fréquence $\sqrt{\nu}$ comme le laissait prévoir l'approche théorique du chapître II.

La pente de cette droite a été estimée par la méthode des moindres carrés, elle vaut

$$9{,}3 \quad ^{\circ} / \sqrt{\text{Hz}}$$

../..

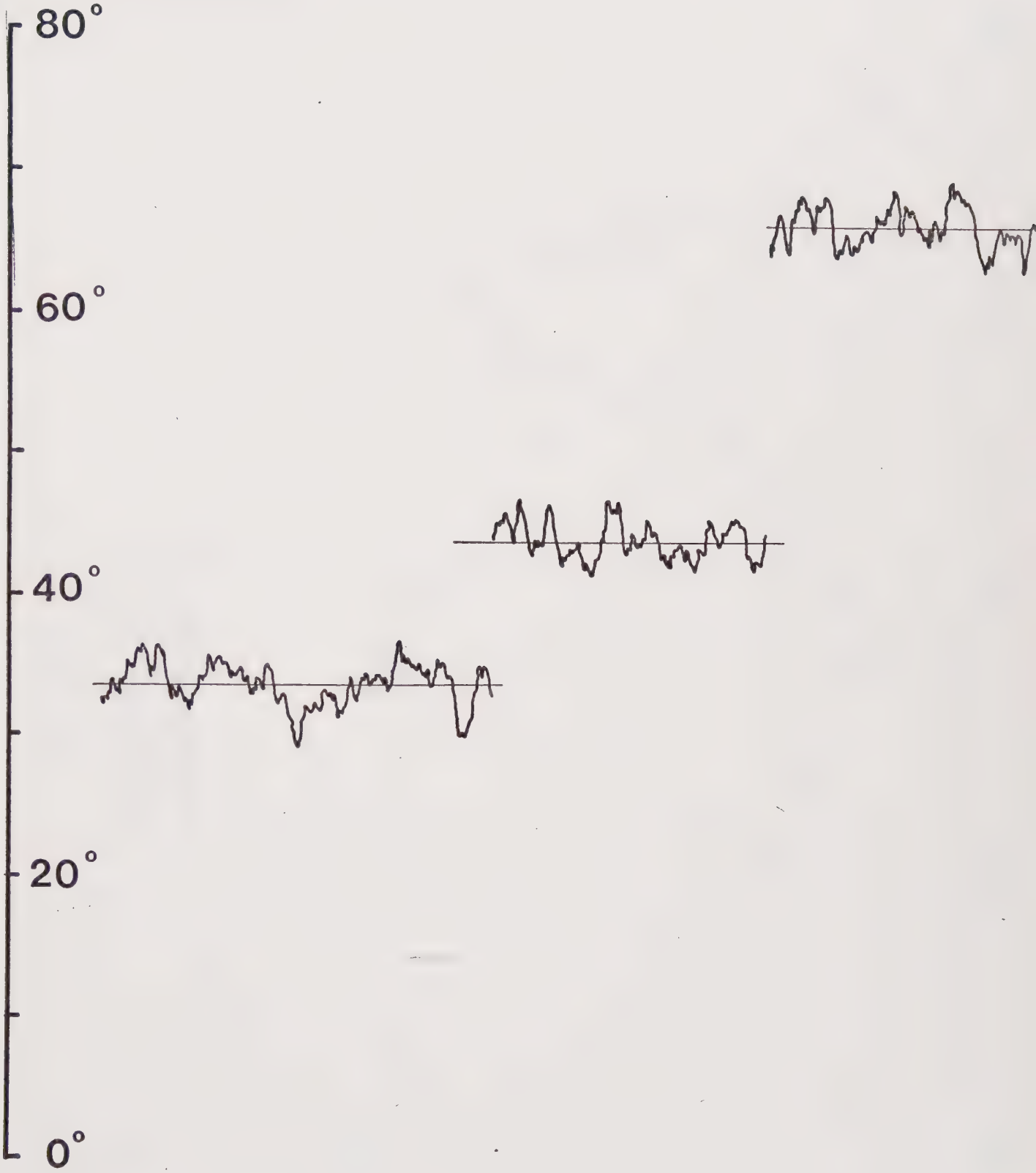


Figure III-10-a : enregistrement du déphasage .

../..

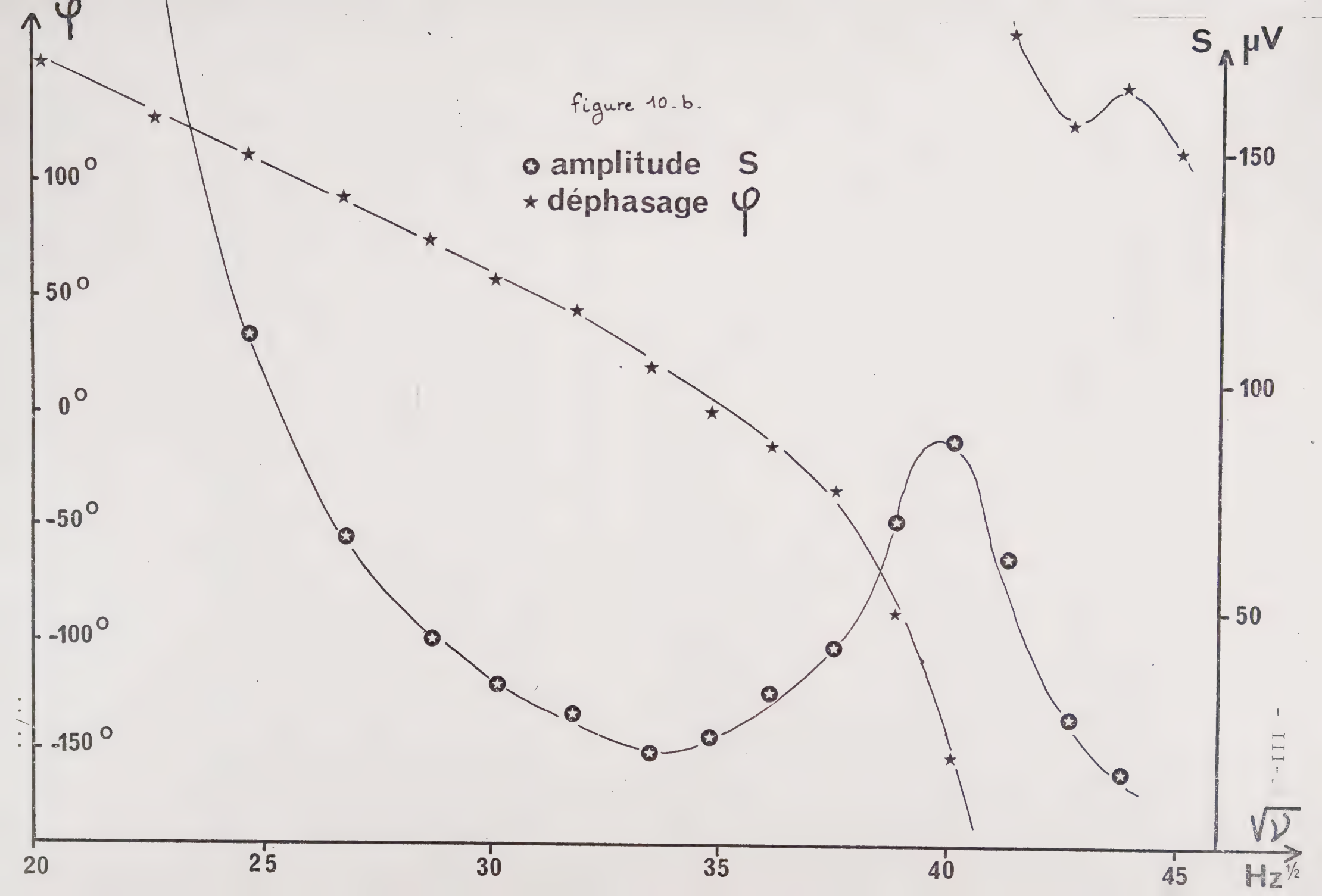


figure 10.b.
amplitude S
déphasage φ
φ
S μV
100°
50°
0°
-50°
-100°
-150°
150
100
50
20
25
30
35
40
45
√ν
Hz½

Les enregistrements montrent (figure III-10-a) que les déphasages ont un écart quadratique moyen de 3° ce qui permet d'estimer l'écart quadratique moyen sur la pente des moindres carrés (36) : 0,2°/ $\sqrt{Hz}$.

La détermination de la diffusivité thermique χ_f consiste en un ajustement numérique de la pente mesurée pour la droite φ ($\sqrt{\nu}$). Ce calcul nécessite la connaissance de l'épaisseur de la gaine optique de la fibre. Les rayons a et b ont été mesurés au microscope dont l'oculaire est muni d'un micromètre objectif :

$$a = 64\ \mu m \pm 1\ \mu m \quad \text{et} \quad b = 31,5\ \mu m \pm 0,5\ \mu m$$

En introduisant ces valeurs dans le calcul numérique et ayant vérifié la proportionnalité de la pente mesurée précédemment et de l'épaisseur de la gaine optique, la valeur obtenue pour la diffusivité thermique est

$$\chi_f = 1,2\ 10^{-7} \pm 0,06\ 10^{-7}\ m^2 s^{-1}$$

Cette valeur expérimentale est inférieure à la diffusivité thermique de la silice pure (8,3 10^{-7} m^2/s à 5,2 10^{-7} m^2/s suivant les auteurs). Cette différence peut-être attribuée essentiellement à deux faits : d'une part, la présence de dopants pour créer le gradient d'indice et, d'autre part, le fait que la fibre soit étirée à partir d'une préforme peut induire une anisotropie de la conductivité thermique donc de la diffusivité.

Notons que le modèle utilisé pour évaluer ce paramètre ne prend en compte qu'une seule valeur de χ dans le coeur et dans la gaine optique. Il est donc inadapté à la mise en évidence de différences entre ces deux zones de la fibre. Cependant,

un calcul plus complet faisant intervenir deux valeurs différentes de x dans le coeur et la gaine est inutile ; la source de chaleur étant toujours dans le coeur, l'inertie thermique de la gaine intervient de façon prépondérante dans le déphasage. En conséquence, la valeur obtenue n'est que valeur moyenne de la diffusivité thermique radiale de la fibre.

Une telle mesure n'a pas été effectuée par effet mirage bien que le principe reste valable théoriquement. Comme nous l'avons remarqué dans le second chapître, la mesure de la diffusivité thermique nécessite, suivant cette méthode l'utilisation de fréquences élevées, de sorte que la longueur de diffusion thermique soit inférieure à l'épaisseur de la gaine. Or, le pointeur de direction (25) utilisé ne peut fonctionner à haute fréquence en raison de la présence d'un asservissement mécanique. L'étude de la phase φ du signal à l'aide d'un détecteur, telle qu'une photodiode à quadrans, ayant une bande passante plus élevée permettrait néanmoins une telle mesure.

III-2 Expérience utilisant l'effet mirage

III-2-1 - Schéma du dispositif

Le schéma du dispositif expérimental est rappelé sur la figure III-11.

La fibre est tendue entre deux points distants de 75 cm. Le faisceau sonde, en l'absence de gradient d'indice est

../..

placé parallèlement à la fibre à la distance r_o = 2 mm.

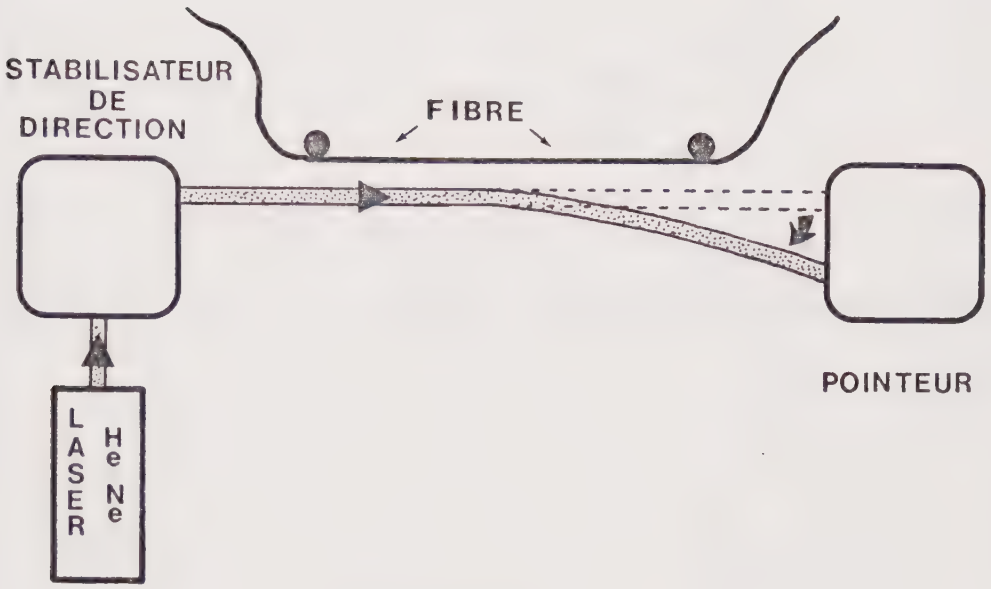
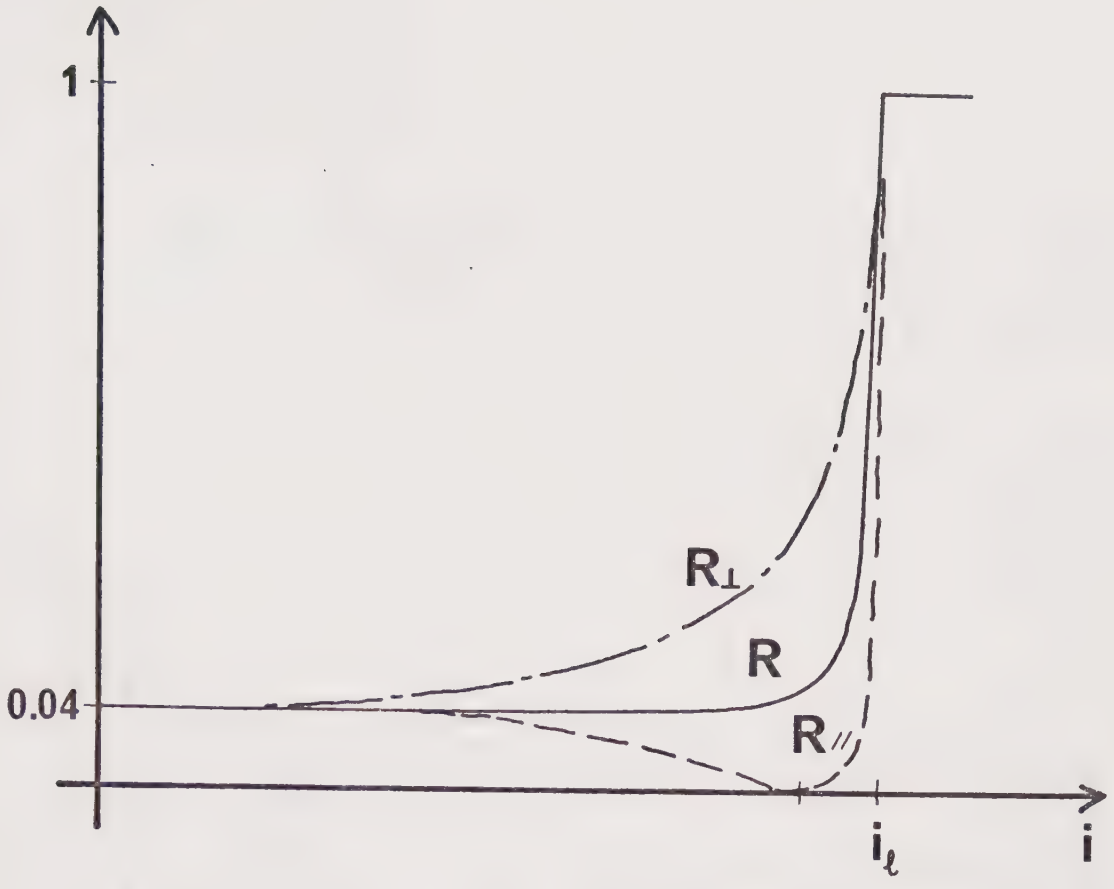


figure III - 11.

III-2-2 - Le pointeur de direction

Les angles de déviation sont mesurés à l'aide d'un pointeur optique de grande précision (0,01") mis au point au laboratoire (25). Le principe de cet appareil est basé sur la forte dépendance du coefficient en intensité de réflexion d'un dioptre plan en fonction de l'angle d'incidence au voisinage de l'angle limite i_ℓ (figure III-12).

Dans la pratique le dioptre est la base d'un prisme P (figure III-13). Le faisceau à étudier arrive, en l'absence de toute perturbation sous une incidence i_o sur le dioptre donnant ainsi naissance à un faisceau transmis et un faisceau réfléchi.



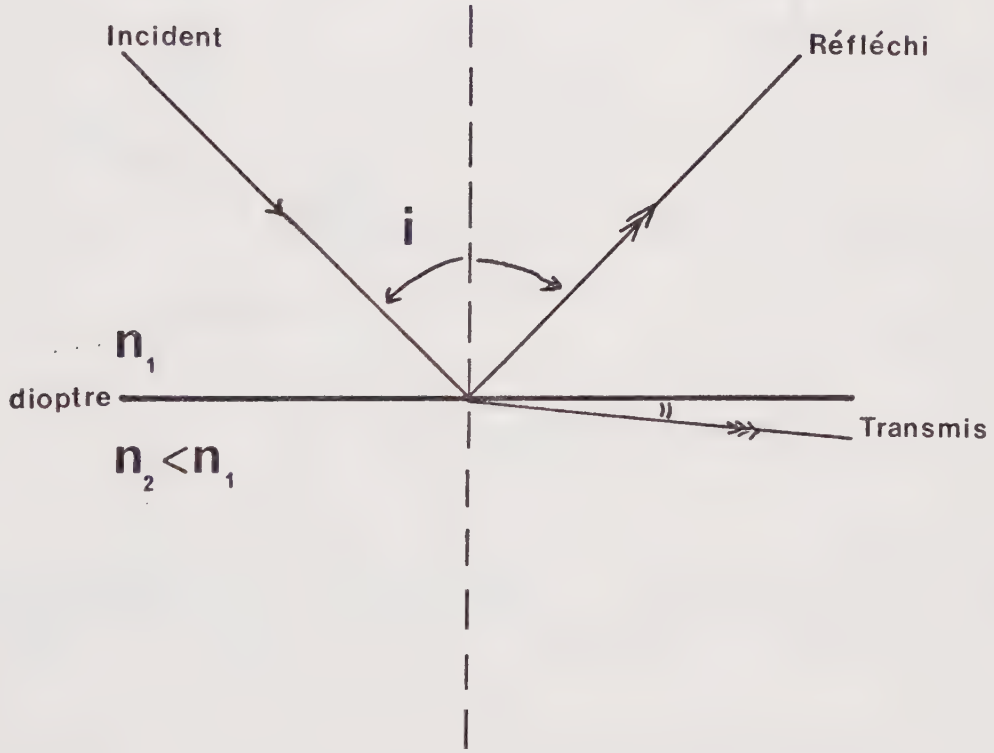


Figure III-12 : Coefficients de réflexion sur un dioptre plan.

Ceux-ci sont modulés en amplitude à la même fréquence f, en opposition de phase et reçus par le même détecteur photoélectrique. Le signal électrique obtenu est de fréquence f et son

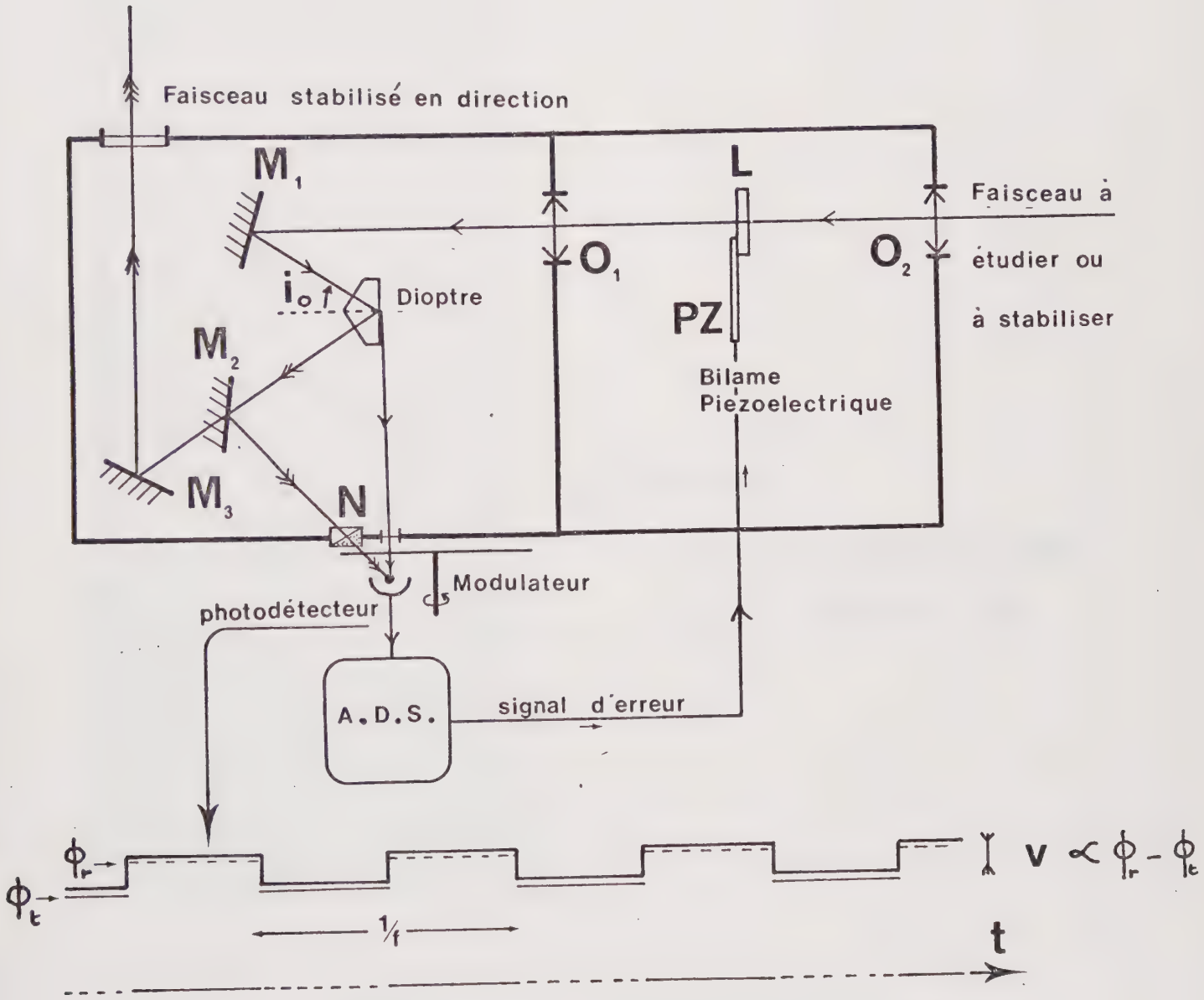


figure III.13.

../..

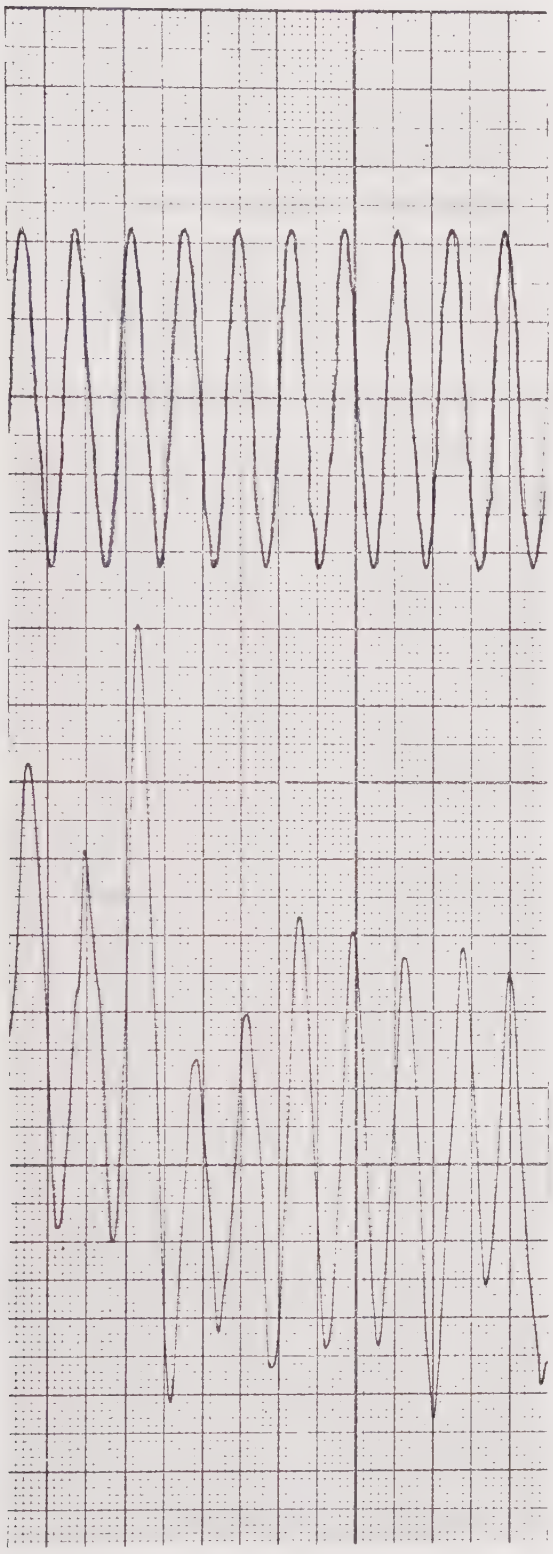


Figure III-14 : Tension aux bornes
de la lame piézoélectrique.

../..

amplitude est proportionnelle à la différence des flux transmis et réfléchis ϕ_t et ϕ_r (modulation en opposition de phase) ; sa détection est faite à l'aide d'un amplificateur à démodulation synchrone (A.D.S.). Un coin photométrique permet d'équilibrer le flux transmis et le flux réfléchi ; on peut annuler ainsi la tension V (i_o) détectée par l'A.D.S. pour l'incidence i_o. Cette opération définit un point de fonctionnement de l'appareil. Dès lors, toute variation de l'angle d'incidence Δi autour de i_o, se traduisant par une modification de $\phi_r - \phi_t$, donnera lieu à une tension V en sortie de l' A.D.S., proportionnelle à Δi dans le domaine d'utilisation de l'appareil (la dynamique est limitée car la sensibilité $V/\Delta i$ dépend du point de fonctionnement i_o). On peut directement mesurer Δi de cette façon (après étalonnage) mais il est préférable de travailler à incidence fixe. Ceci est réalisé en se servant de la tension V comme signal d'erreur pour faire tourner le faisceau arrivant sur le dioptre, l'asservissant ainsi à l'angle i_o. Pour celà, la tension continue V, amplifiée est appliquée à un bilame piézoélectrique PZ qui fait tourner une lame L à faces planes et parallèles placée au foyer de la première lentille O_1 d'un doublet afocal O_1O_2 (37). La mesure de l'angle de rotation du faisceau d'entrée se déduit après étalonnage du système, de celle de la tension appliquée au bilame piezo électrique. Cet étalonnage se fait en imposant une tension au bilame dont la rotation est alors mesurée à la lunette autocollimatrice.

Un tel montage possède un double avantage : d'une part la mesure de la rotation du faisceau incident mais de plus, si le miroir M_2 (figure III-14) est remplacé par une lame semi transparente, on dispose à la sortie de l'appareil un faisceau stabilisé en direction.

En fait, dans notre montage nous avons utilisé deux appareils. L'un en tant que stabilisateur, diminuant ainsi le

bruit dû aux fluctuations en direction du faisceau laser He-Ne et l'autre pour mesurer la déviation provoquée par le gradient d'indice induit par l'échauffement de la fibre.

III-2-3 Mesures

La fibre est ici encore parcourue par un flux de lumière modulée en amplitude. La fréquence ν (2 ou 3 Hz) reste faible en raison de la présence du bilame piezo-électrique. Dans ce cas le signal d'erreur appliqué au bilame est lui aussi modulé à 2 ou 3 Hz et détecté par démodulation synchrone. L'amplitude de cette tension est enregistrée (figure III-15). L'étalonnage du pointeur ayant fourni 0,3" / Volts c-c, les résultats obtenus sont les suivants pour deux fréquences différentes :

fréquence de modulation	déviation
2 Hz	0,28" ± 0,004"
3 Hz	0,19" ± 0,004"

L'amplitude du flux modulée dans la fibre est 380 mW pour les deux enregistrements ce qui montre que le signal diminue avec la fréquence de modulation. L'étalonnage du système se fait de la même façon que dans la méthode photoacoustique en substituant à la fibre un fil résistif parcouru par un courant alternatif de fréquence $\nu/2$, ce qui donne pour le coefficient d'absorption β :

	β cm^{-1}	10^{-5}	β dB/km	
2 Hz	2,1	0,2 cm^{-1}	9,0	1dB/km
3 Hz	2,3	0,2 cm^{-1}	9,7	1dB/km

Notons tout d'abord, que les deux méthodes photoacoustique et photodéviation présentent un bon accord qui confirme la

../..

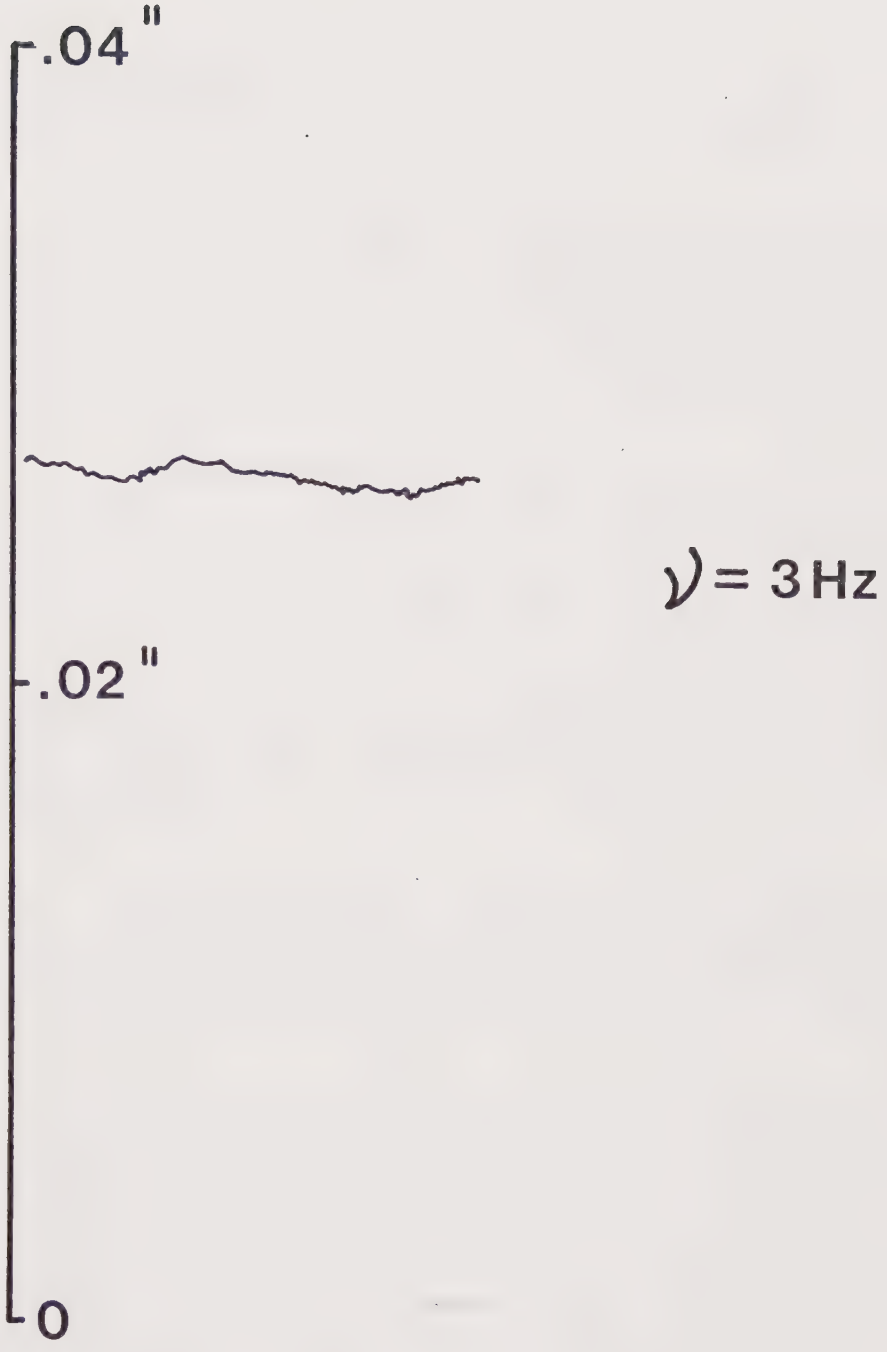


Figure III-15 : enregistrements de la déviation après démodulation synchrone

../..

faible influence de la lumière diffusée dans le cas de l'utilisation d'une cellule photoacoustique.

Les incertitudes de mesure indiquées correspondent aux fluctuations mises en évidence sur les enregistrements (fig. III-14). Parmi les sources de bruit, on peut compter les fluctuations du faisceau laser en direction, et intensité.

L'utilisation du stabilisateur permet de réduire fortement l'influence des variations de directions dues au laser lui-même. Il reste néanmoins et de façon prépondérante les turbulences atmosphériques de la pièce dont le spectre, est contenu entre 0 et 200 Hz environ. Il est donc comparable à celui du bruit acoustique ambiant. L'utilisation du pointeur en mode asservi permet d'affaiblir efficacement le bruit dû aux fluctuations d'intensité.

Par conséquent, interviennent principalement sur les enregistrements les fluctuations atmosphériques et pour une moindre part les bruits électriques de la chaîne de détection.

En conclusion, rappelons que les difficultés liées à la définition de la déviation d'un faisceau laser dans un gradient d'indice peuvent être contournées ici par l'étalonnage. Notons cependant, que celui-ci doit être placé à la même distance du faisceau sonde que la fibre ce qui rend l'opération plus délicate que dans l'expérience utilisant la cellule. L'étude de l'absorption de guide optique plan peut-être menée à bien par cette méthode, la géométrie du dispositif (unidimentionnelle en première approximation) étant alors mieux adaptée que la symétrie cylindrique.

CONCLUSION

L'absorption de lumière par un échantillon provoquant un échauffement, une approche thermique a permis d'apporter une réponse au problème de la séparation de l'absorption des autres causes d'atténuation dans une fibre optique. La détection de ces variations de température par effet mirage ou par effet photoacoustique constituent deux techniques de mesure du coefficient d'absorption β .

Ces méthodes non destructives ne nécessitent l'utilisation que de quelques dizaines de mètres de fibre. La technique photoacoustique fournissant une mesure locale avec résolution de quelques centimètres permet en plus, de localiser des inhomogénéîtés au niveau de l'absorption.

Les pertes dues à la diffusion Rayleigh, encore importantes pour λ = 514,5 nm nous ont conduit au choix de cette longueur d'onde pour tester la méthode de mesure. Le seuil de détection théorique, déterminé ici par le bruit électrique du microphone et de son préamplificateur, est de 1 dB/km.mW. Cependant, les conditions expérimentales telles que le niveau sonore ambiant ou les fluctuations atmosphériques, imposées par l'environnement ramènent cette limite à 10 dB/km. mW. Ces spectres de bruit sont malheureusement riches en basses fréquences (0 à 200 Hz) qui doivent être employées dans les méthodes proposées.

L'étude du signal, tant photoacoustique que de déviation, nous a montré au chapître II qu'il est proportionnel à la densité de chaleur produite par absorption $\beta\phi/S$, ou ϕ_o est le flux couplé et S la section droite du coeur. La faible valeur de S pour une fibre optique permet d'obtenir des densités d'énergie importantes et ce à l'intérieur de l'échantillon par suite du guidage de la lumière. Une extension de la méthode est

../..

donc envisagée pour la caractérisation de guides optiques plans qui ont par ailleurs une géométrie mieux adaptée que la fibre à l'utilisation de la photodéviation. Dans ce cas, la plus courte longueur d'interaction entre la faisceau sonde et l'échantillon est compensée par des pertes beaucoup plus importantes de l'ordre de quelques décibels par centimètres.

La section S de l'échantillon étant fixée, la proportionnalité du signal et de $\beta\Phi_o$ détermine les applications possibles de ces techniques.

L'absence de sources continues, puissantes et accordables dans le proche infrarouge ne permet pas actuellement la mesure du coefficient d'absorption β dans les domaines où les fibres ont leurs meilleures performances. Cependant, les méthodes photoacoustiques et de photodéviation sont adaptées à l'étude de pics d'absorption, nombreux dans cette bande spectrale permettant ainsi un dosage des dopants ou d'ions parasites tels que l'ion OH^-.

L'importance contribution de la diffusion Rayleigh aux pertes dans le domaine visible et encore plus dans l'U.V. encourage l'application de telles méthodes à la caractérisation de fibres utilisées pour le transport de la lumière sur de courtes distances. C'est par exemple le cas dans une automobile ou dans un avion ; le gain de poids par rapport aux liaisons par fils électriques est alors important et sera amélioré par l'utilisation de fibres synthétiques.

Enfin, sur le plan des mesures d'absorption, ces méthodes peuvent apporter une contribution à la détermination de la nature de pics d'atténuation tels que le pic de fibrage (630 nm) ou de pertes importantes dans les fibres irradiées.

Notons que dans ce cas, l'étalonnage du système qui nous a permis d'effectuer une mesure n'est pas indispensable une spectroscopie d'absorption étant suffisante.

L'intensité de la source étant modulée, l'inertie thermique du matériau provoque un déphasage entre le signal enregistré et la modulation, fonction de la fréquence. Son étude nous a permis de mesurer la diffusivité thermique radiale de la fibre, paramètre important en vue de la réalisation de capteurs de température. L'avantage essentiel de la méthode dans ce cas est de disposer d'une source de chaleur à l'intérieur de l'échantillon par l'intermédiaire du guidage de la lumière. Ici, encore de telles mesures peuvent être réalisées sur d'autres guides optiques.

Enfin, la mesure est effectuée en deux temps ; d'abord sur la fibre, ensuite sur le fil. Une amélioration possible de la technique consisterait à faire une mesure simultanée différentielle réalisant ainsi une méthode de zéro.

REFERENCES

1 - G.B. HOCKER Appl. Opt. 18 (1979) 1445
G.B. HOCKER Appl. Opt. 18 (1979) 3679

2 - A. COZANNET, J. FLEURET, H. MAITRE, M. ROUSSEAU
Optique et Télécommunications, (EYROLLES et CNET - ENST (1981) Paris). De nombreuses références sont citées dans cet ouvrage.

3 - P. MATTHIJSSE, C.M. de BLOCK, Elect. Letters 15 (1979) 795

4 - Communication privée P. DUMAS, Y. LEVY, W. CARVALHO

5 - E.J. FRIEBELE, M.E. GINGERICH et K.J. LONG
Appl. Opt. 21 (1982) 547

6 - Y. OHTSUKA, K. MAEDA
Appl. Opt 20 (1981) 3562

7 - J.F. NYE, Physical properties of crystals (OXFORD UP London 1957)

8 - H.S. CARSLAW, J.C. JEAGER Conduction of heat in solids (Oxford Clarendon 1959).

9 - P.J. SEVERIN Appl. Opt 18 (1979) 1546
D.A. PINNOW et T.C. RICH Appl. Opt. 12 (1973) 984

10 - R.L. COHEN Appl. Opt. 13 (1974) 2518
R.L. COHEN, K.W. WEST, P.D. LAZAY and J. SIMPSON
Appl. Opt. 13 (1974) 2522

11 - BELL A.G. am. J. Sci 20 (1880) 305
BELL A.G. Philos. Mag. 11 (5) (1881) 510

12 - VIENGEROV M.L. Dokl. Akad. Nank SSSR 19 (1938) 687

13 - J.G. PARKER Appl. Opt 12 (1973) 2974

14 - A. ROSENCWAIG - A. GERSHO J. Appl. Phys. 47 (1976) 64

15 - H.S. BENNETT and R.A. FORMAN Appl. Opt 15 (1976) 2405

16 - L.C. AAMODT, J.C. MURPHY, J.G. PARKER J. Appl. Phys 48 (1977) 927.

17 - F.A. Mac DONALD Appl. Opt 18 (1979) 1365.

18 - A.C. TAM, C.K.N. PATEL, R.J. KERL Opt. Letters 4 (1979) 81

19 - A.C. BOCCARA, D. FOURNIER and J. BADOZ Appl. Phys. Lett. 36 (1980) 130.

20 - D. FOURNIER, A.C. BOCCARA, N.M. AMER and R. GERLACH Appl. Phys. Lett. 37 (1980) 519

21 - W.B. JACKSON, N.M. AMER, A.C. BOCCARA and D. FOURNIER Appl. Opt. 20 (1981) 1333.

22 - A.C. BOCCARA, D. FOURNIER, W. JACKSON and N.M. AMER Opt. Lett. 5 (1980) 377

23 - S. HUARD and D. CHARDON Opt. Com 39 (1981) 59

24 - P. CHARPENTIER, F. LEPOUTRE and L. BERTRAND J. Appl. Phys. 53 (1982) 608

25 - A. MAZET-HUARD Jour. of Opt. 8 (1977) 189

26 - W. NOWACKI, Thermoelasticity (Pergamon Press 1962)

27 - S.P. TIMOSHENKO et J.N. GOODIER Théory of élasticity (Mc Graw Hill New-York 1934).

28 - M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN Handbook of Mathématical functions (Dover, New-York, 1970)

29 - P.M. MORSE et K.U. INGARD Theoretical Acoustics (Mc Graw Hill, New-York 1968)

30 - F.A. Mc DONALD and G.C. WETSEL, JR J. Appl. Phys 49 (1978) 2313.

31 - Y.S. TOULOUKIAN Thermal Diffusivity (IFI/PLENUM, New-York 1973)

32 - Hanbook of Chemistry and Physics (CRC Press 59e édition 1978-1979)

33 - A. MARECHAL Handbuch der Physik Vol. 24 (Springer Verlag Berlin)

34 - N.C. FERNELLUS Appl. Opt 18 (1979) 1784

35 - L.B. KREUZER J. Appl. Phys. 42 (1971) 2934
A. ROSENCWAIG Photoacoustics and Photoacoustics spectroscopy (Wiley-Interscience New-York 1980)

36 - Y.V. LINNIK Méthode des moindres carrés (Dunod, Paris 1963)

37 - A. MAZET-HUARD Thèse, Université de Paris-Sud, ORSAY, 1974

38 - D. CHARDON and S. HUARD Appl. Phys. Lett. sous presse.

Annexe 1

	silice	aluminium	air	cuivre
K_i en W/K/m	1,38	$2,37\ 10^{2}$	$2,60\ 10^{-2}$	$3,98\ 10^{2}$
ρ_i en kg/m^{-3}	$2,2\ 10^{3}$	$2,7\ 10^{3}$	1,293	$8,89\ 10^{3}$
C_i en J/kg/K	$7,5\ 10^{2}$	$9,0\ 10^{2}$	$1,0\ 10^{3}$	$3,84\ 10^{2}$
σ_i	0,17	0,13	-	0,30
E_i en N/m^2	$7,0\ 10^{10}$	$7,0\ 10^{10}$	-	$1,2\ 10^{11}$
χ_i en m^2/s	$8,36\ 10^{-7}$	$9,75\ 10^{-5}$	$2,01\ 10^{-5}$	$1,16\ 10^{-4}$
η_i en $K.s/m^2$	$9,23\ 10^{6}$	$8,42\ 10^{5}$	-	$3,7\ 10^{6}$
c_i en m/s	$5,85\ 10^{3}$	$5,19\ 10^{3}$	$3,31\ 10^{2}$	$4,26\ 10^{3}$
m_i en K^{-1}	$5,78\ 10^{-7}$	$9,35\ 10^{-6}$	-	$5,4\ 10^{-5}$

Annexe 1 (suite et fin)

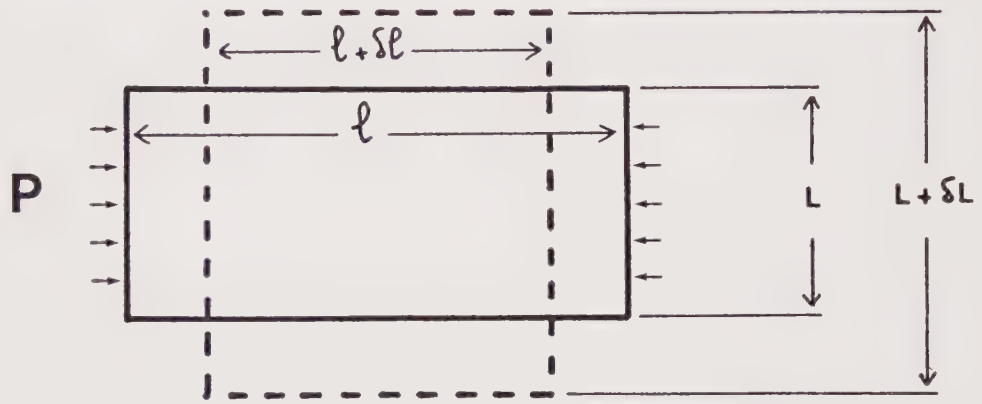
a_{t_i} en K^{-1}	$4,1\ 10^{-7}$	$7,2\ 10^{-6}$	-	$1,7\ 10^{-5}$

Annexe 2

Relations entre les coefficients de Lamé,
le module d'Young et le coefficient de Poisson.

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson σ peuvent être définis simplement de la façon suivante :

Considérons une barre de longueur 1 et de largeur L sousmise à la pression P à chaque extrèmité.



Sous 1'effet de cette contrainte (supposée homogène) elle va se déformer et ses dimensions deviennent $1 + \delta 1$ et $L = + \delta L$ (trait pointillé). Les coefficients E et σ sont définis par :

$$\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{P}{E} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta L}{\delta \ell} = \sigma$$

Ces deux coefficients sont liés aux coefficients de

../..

Lamé λ et μ par les relations :

$$\lambda \quad \frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} E \quad \text{et} \quad \mu \quad \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

ou réciproquement

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad \text{et} \quad E = \mu \frac{(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

Ces expressions conduisent pour les coefficients de couplage n_i, m_i et pour la vitesse de propagation du son à

$$c_i^2 = \frac{(1-\sigma)\,E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{1}{\rho} \qquad m_i = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} a_t$$

$$\eta = \frac{E}{1-2\sigma} a_t \frac{T_0}{K}$$

Annexe 3

Résolution des équations thermoélastiques

Rappelons les équations thermoélastiques dans les solides (26) :

$$\Delta T - \frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} - \eta_i \Delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = -\frac{W}{K} \qquad (1)$$

où W n'est différent de zéro que dans le coeur de la fibre.
et

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = m T \qquad (2)$$

La dépendance temporelle des solutions cherchées est de la forme $\exp(i\omega t)$. Les équations (1) et (2) deviennent :

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi} T - i\omega\eta \Delta\psi = -\frac{\beta\phi_0}{2\pi K} \qquad (3)$$

et

$$\Delta\psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = m T$$

L'ensemble des équations à résoudre s'écrit donc

$r < b$ (coeur)

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi_f} T - i\omega\eta_f \Delta\psi = -U = -\frac{\beta\phi_0}{2\pi K_f}$$

$$\Delta\psi + \left(\frac{\omega}{c_f}\right)^2 \psi = m_f T$$

$b < r < a$ (gaine optique)

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi_f} T - i\omega\eta_f \Delta\psi = 0$$

$$\Delta\psi + \left(\frac{\omega}{c_f}\right)^2 \psi = m_f T$$

$r > R$ (paroi de la cellule)

$$\Delta T - \frac{i\omega}{\chi_p} - i\omega\eta_p \Delta\psi = 0$$

$$\Delta\psi + \left(\frac{\omega}{c_p}\right)^2 \psi = m_p T$$

../..

Dans le coeur, la solution des équations (3) (4) est la somme d'une solution particulière.

$$T_1 = -\frac{i\beta\Phi_0}{2S\rho_f C_f \omega} \quad \text{et} \quad \psi_1 = \frac{m C_f^2}{\omega} T_1$$

et de la solution générale de l'équation sans second membre. Cette solution est, puisque le problème à la symétrie de révolution, une fonction de Bessel d'ordre 0 (28) que nous désignerons par

$$Z_0(kr)$$

k est une constante de propagation à déterminer. Nous poserons

$$T = A\, Z_0(kr) \quad \text{et} \quad \psi = B\, Z_0(kr)$$

Compte-tenu de la propriété (équation de Bessel) :

$$\Delta Z_0(kr) = \frac{d^2}{dr^2} Z_0 + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} Z_0 = -k^2 Z_0(kr)$$

on obtient en reportant cette forme dans les équations sans second membre :

$$-\left(k^2 + \frac{i\omega}{\chi}\right) A + i k^2 \omega \eta B = 0 \qquad (5)$$

et

$$m A + \left(k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) B = 0 \qquad (6)$$

Ce système admet des solutions autre que la solution nulle si son déterminant est nul d'où l'équation caractéristique:

$$\left(k^2 + \frac{i\omega}{\chi}\right)\left(k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) + i k^2 \omega m \eta = 0$$

Posons $u = k^2$, on obtient alors

$$u^2 - u\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{i\omega}{\chi} - i\omega m\eta\right) - i\frac{\omega^3}{c^2} = 0$$

le discriminant de cette équation vaut :

$$\Delta = \left[i\omega + \chi\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]\left[1 + \frac{i\omega\varepsilon\left(i\omega - \chi\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}{\left(i\omega + \chi\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)^2}\right]$$

les solutions sont alors

$$k_1^2 = k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{1-i\delta}\right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = m\eta\chi \quad \delta = \frac{\chi\omega}{c^2}$$

et

$$-k_2^2 = i\sigma^2 = i\frac{\omega}{\chi}\left(1 + \frac{\varepsilon}{1-i\delta}\right)$$

Les termes ε , δ sont très petit devant 1 si bien que

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et

$$k_2 = e^{3i\frac{\pi}{4}}\sigma = e^{3i\frac{\pi}{4}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}$$

Ces deux solutions conduisent pour les fonctions $Z_0(kr)$

à $J_0(kr)$ et $Y_0(kr)$ pour $k = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

et Ber(σr) et Ker(σr) pour $\sigma = \sqrt{\frac{\omega}{\chi}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

Ces deux groupes de solution correspondent respectivement au mode acoustique et au mode thermique présentés dans le chapître II pour le cas du gaz.

En reportant les valeurs de la constante k dans une des équations (5) ou (6) (elles sont proportionnelles), on obtient :

pour le mode acoustique $\quad \frac{T_{ac}}{\Psi_{ac}} = a = i\frac{\omega\eta k^2}{k^2 + i\sigma^2}$

et

pour le mode thermique $\quad \frac{\Psi_{th}}{T_{th}} = b = \frac{m}{k^2 + i\sigma^2}$

../..

On aboutit alors pour les solides aux solutions suivantes

coeur $T(r) = A_1 \, Ber(\sigma_f r) + a_f A_2 \, J_o(k_f r) + T_1$

(r<b) $\psi(r) = t_f A_1 \, Ber(\sigma_f r) + A_2 \, J_o(k_f r) + \psi_1$

gaine optique

$$T(r) = A_3 Ber(\sigma_f r) + A_4 Ker(\sigma_f r) + a_f [A_5 J_o(k_f r) + A_6 Y_o(k_f r)]$$

(b<r<a)

$$\psi(r) = t_f [A_3 Ber(\sigma_f r) + A_4 Ker(\sigma_f r)] + A_5 J_o(k_f r) + A_6 Y_o(k_f r)$$

paroi de la cellule

$$T(r) = A_{11} Ker(\sigma_p r) + a_p A_{12} H_o^{(2)}(k_p r)$$

(r>R)

$$\psi(r) = t_p A_{11} Ker(\sigma_p r) + A_{12} H_o^{(2)}(k_p r)$$

Remarquons que dans le coeur, la solution Y_o est éliminée pour cause de divergence à l'origine ainsi que la fonction Ker. Dans la paroi de la cellule supposée milieu semi-infini, la fonction Ber diverge à l'infini et la condition d'onde sortante impose la combinaison $J_o - i Y_o = H_o^{(2)}$

La forme des solutions dans le gaz a été étudiée dans le chapître II. Nous la rappelons ici :

$$T(r) = A_7 \, Ber(\sigma_g r) + A_8 Ker(\sigma_g r) + a_g [A_9 J_o(k_g r) + A_{10} Y_o(k_g r)]$$

$$p(r) = t_g [A_7 Ber(\sigma_g r) + A_8 Ker(\sigma_g r)] + A_9 J_o(k_g r) + A_{10} Y_o(k_g r)$$

avec $k_g = \left(\frac{\omega}{c_g}\right) \left[1 + i \frac{\omega \ell'_\omega}{c_g} - i(\gamma - 1) \frac{\omega \chi_g}{c_g^2}\right]^{1/2}$

$$\sigma_g = \left(\frac{\omega}{\chi_g}\right)^{1/2}$$

$$a_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma \alpha} \left(1 + i \frac{\omega \chi_g}{c_g^2}\right) \quad \text{et} \quad t_g = -i \frac{\gamma - 1}{c_g} \omega \left(\frac{\chi_g}{c_g} - \ell'_\omega\right)$$

Il faut alors déterminer les douzes constantes $A_1 \ldots A_{12}$ à l'aide des conditions aux limites constituées par :

../..

- continuité de la température
- continuité du flux, soit ici de
- continuité du déplacement
- continuité de la contrainte radiale

Il faut alors définir la contrainte dans les solides en fonction du potentiel des déplacements : (26)

$$\Sigma_{rr} = -\frac{2\mu}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

soit en régime sinusoïdal :

$$\Sigma_{rr} = -\frac{2\mu}{r}\frac{d\psi}{dr} - \rho\omega^2\psi$$

D'autre part la relation entre le déplacement $\vec{u}$ et la pression p dans le gaz est donnée par (29) :

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{grad}\left(p + \frac{\gamma}{c_g}\ell'_v\frac{\partial}{\partial t}(p-\alpha T)\right)$$

ce qui donne en régime sinusoïdal

$$-\rho\omega^2\vec{u} = -\overrightarrow{grad}\left(p + i\frac{\gamma\omega}{c_g}\ell'_v(p-\alpha T)\right)$$

soit

$$\psi = \frac{1}{\rho\omega^2}\left[p\left(1+i\frac{\gamma\omega\ell'_v}{c_g}\right) - i\frac{\gamma\alpha\ell'_v\omega}{c_g}T\right]$$

Les quatre relations de continuité aux trois interfaces donnent douze équations indépendantes qui se traduisent par une l'égalité matricielle l'expression de M est donnée en fin d'annexe.

$$(M)(A_i) = (S) \quad \text{avec} \quad (S) = \begin{bmatrix} -T_1 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_f\omega^2\psi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les calculs analytiques étant trop lourds, l'évaluation des constantes A_i se fait numériquement. Ensuite, toute grandeur physique telle que pression ou température peut-être calculée en tout point de la cellule.

$Ber(y_f)$	$a_f J_o(x_f)$	$-Ber(y_f)$	$-Ker(y_f)$	$-a_f J_o(x_f)$	$-a_c Y_o(x_f)$						
$\sigma_f Ber'(y_f)$	$-a_f k_f J_1(x_f)$	$-\sigma_f Ber'(y_f)$	$-\sigma_f Ker(y_f)$	$a_f k_f J_1(x_f)$	$a_f k_f Y_1(x_f)$						
$t_f \sigma_f Ber'(y_f)$	$-k_f J_1(x_f)$	$-t_f \sigma_f Ber'(y_f)$	$-t_f \sigma_f Ker'(y_f)$	$k_f J_1(x_f)$	$k_c Y_1(x_f)$						
$u_f t_f \sigma_f Ber'(y_f)$ $+\rho_f \omega^2 t_c Ber(y_f)$	$-u_f k_f J_1(x_f)$ $+\rho_f \omega^2 J_o(x_f)$	$-u_f t_f \sigma_f Ber'(y_f)$ $+\rho_f \omega^2 t_f Ber(y_f)$	$-u_f t_f \sigma_f Ker'(y_f)$ $+\rho_f \omega^2 t_f Ker(y_f)$	$u_f k_f J_1(x_f)$ $-\rho_f \omega^2 J_o(x_f)$	$u_f k_f Y_1(x_f)$ $-\rho_f \omega^2 Y_o(x_f)$						
		$Ber(y_g)$	$Ker(y_g)$	$a_f J_o(x_g)$	$a_f Y_o(x_g)$	$-Ber(y_g')$	$-Ker(y_g')$	$-a_g J_o(x_g')$	$-a_g Y_o(x_g')$		
		$k_f \sigma_f Ber'(y_g)$	$k_f \sigma_f Ker'(y_g)$	$-a_f k_f k_f J_1(x_g)$	$-a_f k_f k_f Y_1(x_g)$	$-k_g \sigma_g Ber'(y_g')$	$-k_g \sigma_g Ker'(y_g')$	$a_g k_g k_g J_1(x_g')$	$a_g k_g k_g Y_1(x_g')$		
		$t_f \sigma_f Ber'(y_g)$	$t_f \sigma_f Ker'(y_g)$	$-k_f J_1(x_g)$	$-k_f Y_1(x_g)$	$\frac{i \rho_h \gamma_{al} \sigma_g}{\rho_g c_g \omega} Ber'(y_g')$	$\frac{i \rho_h \gamma_{al} \sigma_g}{\rho_g c_g \omega} Ker'(y_g')$	$\frac{(1+i\omega \frac{\rho_h'}{c_g})}{\frac{k_g}{\rho_g \omega^2}} J_1(x_g')$	$\frac{(1+i\omega \frac{\rho_h'}{c_g})}{\frac{k_g}{\rho_g \omega^2}} Y_1(x_g')$		
		$u_g t_f \sigma_f Ber'(y_g)$ $+t_f \rho_f \omega^2 Ber(y_g)$	$u_g t_f \sigma_f Ker'(y_g)$ $+\rho_f \omega^2 t_f Ker(y_g)$	$-u_g k_f J_1(x_g)$ $+\rho_f \omega^2 J_o(x_g)$	$-u_g k_f Y_1(x_g)$ $+\rho_f \omega^2 Y_o(x_g)$	$-t_g Ber(y_g')$	$-t_g Ker(y_g')$	$-J_o(x_g')$	$-Y_o(x_g')$		
						$Ber(y_i)$	$Ker(y_i)$	$a_g J_o(x_i)$	$a_g Y_o(x_i)$	$-Ker(y_i')$	$-a_p H_o^{(2)}($
						$k_g \sigma_g Ber'(y_i)$	$k_g \sigma_g Ker'(y_i)$	$-a_g k_g k_g J_1(x_i)$	$-a_g k_g k_g Y_1(x_i)$	$-k_p \sigma_p Ker'(y_i')$	$a_p k_p k_p H_1^{(2)}($
						$\frac{i \rho_h \gamma_{al} \sigma_g}{\rho_g c_g \omega} Ber'(y_i)$	$-\frac{i \rho_h \gamma_{al} \sigma_g}{\rho_g c_g \omega} Ker'(y_i)$	$-\frac{(1+i\omega \frac{\rho_h'}{c_g})}{k_g} \frac{J_1(x_i)}{c_g \omega^2}$	$-\frac{(1+i\omega \frac{\rho_h'}{c_g})}{\frac{k_g}{\rho_g \omega^2}} Y_1(x_i)$	$-\sigma_p t_p Ker'(y_i')$	$k_p H_1^2($
						$t_g Ber(y_i)$	$t_g Ker(y_i)$	$J_o(x_i)$	$Y_o(x_i)$	$-u_p t_p \sigma_p Ker'(y_i')$ $\rho \omega^2 t_p Ker(y_i')$	$u_p k_p H_1^2(x$ $\rho \omega^2 H_1^2(x$

Matrice M

avec $X_f = k_f b$, $Y_f = k_f a$, $Y_g = \sigma_f a$, $X'_g = k_g a$

$Y'_g = \sigma_g a$, $Y_i = \sigma_g R$, $X_i = k_g R$, $X'_i = k_g R$, $Y'_i = \sigma_p R$

qui désignent les arguments des fonctions cylindriques

et $u_f = \frac{2\mu_f}{b}$, $u_g = \frac{2\mu_f}{a}$, $u_p = \frac{2\mu_p}{R}$.